6

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇 数学分析习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾
封面设计 庞 婕 孙 佳



6

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 6/费定晖，周学圣编演. —4 版. —济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5895-8

Ⅰ.①吉... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120112 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 6

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031　电话：(0536)2116806

开本：787 mm × 1092mm　1/16
印张：13.5
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5895-8
定价：19.00 元

第四版前言

本书自1979年出版发行以来，历经30多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书4462题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1° **二重积分的直接计算法**　所谓连续函数 $f(x,y)$ 在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分，指的是

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而求和是对所有使 $(x_i,y_j)\in\Omega$ 的那些 i,j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出：

$$a\leqslant x\leqslant b,\qquad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则相应的二重积分可按以下公式来计算：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2° **二重积分中的变量代换**　若连续可微函数

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω' 之间的一一映射，且雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变（可能在零测度集上有例外），则成立以下公式：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|I|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例如，根据公式 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时，有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3901】　把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n}\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算此积分.

解　由于
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中
$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2},\qquad\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$.

【3902】　用直线
$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad(i,j=0,1,\cdots,n)$$

把区域 $1\leqslant x\leqslant 2,1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此区域内的下积分和 $\underline{S}$ 与上积分和 $\overline{S}$. 当 $n\to\infty$ 时，上积分和与下积分和的极限等于什么？

解　下积分和
$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\right\}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中 $\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$， $\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$；

而上积分和 $\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\right\}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\overline{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

【3903】 用一组顶点 A_{ij} 位于整数点的正方形作为积分域的近似域，并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值，近似地计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$，并与精确值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\approx 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177+0.329+0.302+0.154+0.285\approx 2.470,$$

即 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx 9.880.$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=4\int_0^5\ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx=4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)dx.$$

由于 $\int\ln(24+x^2)dx=x\ln(24+x^2)-\int\frac{2x^2}{24+x^2}dx=x\ln(24+x^2)-2x+\frac{24}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x}{\sqrt{24}}+C.$

从而，$2\int_0^5\ln(24+x^2)dx=\left[2x\ln(24+x^2)-4x+\frac{48}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Big|_0^5=20\ln7-20+8\sqrt{6}\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}$；

又 $4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx=4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5+4\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$

$$=20\ln7+4\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x=5\sin t$，有

$$\int_0^5\frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-25\cos^2t+25}{5\cos t+7}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos t-7)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{24}{5\cos t+7}dt$$

$$=(7t-5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-24\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\tan\frac{t}{2}\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt{6}\arctan\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而，$4\int_0^5\ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx=20\ln7+14\pi-20-16\sqrt{6}\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}.$

注意到 $2\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}+\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2}$，

最后便得到 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\arctan\frac{2}{\sqrt{24}}+\arctan\frac{5}{\sqrt{24}}\right)=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.19.$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的区域都被忽略，因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差 $\frac{4.31}{13.19}\approx 32.7\%$.

注意 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{24+r^2}}=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

【3904】 用直线 $x=$常数，$y=$常数，$x+y=$常数把积分域 S 分为四个相同的三角形，并取被积函数在每个三角形的质心之值，近似地计算积分

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\ \mathrm{d}S,$$

其中 S 是以直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 为边的三角形.

解 我们只须以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分积分域 S，即得四个相同的三角形，它们的面积均为 $\frac{1}{8}$，质心为 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$，于是，得此积分的近似值为

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\ \mathrm{d}S\approx\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+2\cdot 0.912)\approx 0.402,$$

其精确值为
$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\ \mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}=0.4.$$

【3905】 把积分域 $S:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$. 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|=\left|\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\mathrm{d}S\leqslant\sum_{i=1}^n\iint\limits_{\Delta S_i}\omega_i\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta S_i.$$

由于积分域 $S:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的面积等于 π，故只要 $\omega_i<\frac{0.001}{\pi}$，便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|\sin(x_i'+y_i')-\sin(x_i+y_i)|\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|(x_i'+y_i')-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}[|x_i'-x_i|+|y_i'-y_i|]\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x_i'-x_i)^2+(y_i'-y_i)^2]}^{\,*)}=\sqrt{2}\delta_i,$$

故只要取
$$\delta<\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\times 0.001\approx 0.00022,$$

即有
$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

*） 对于任意非负实数 a，b 有

$$2ab\leqslant a^2+b^2\quad\text{或}\quad(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而，$a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

计算积分：

【3906】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y$.

解 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=1.$

【3907】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x xy^2\mathrm{d}y$.

解 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} xy^2 \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{40}$.

【3908】 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi \mathrm{d}r$.

解 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi \mathrm{d}r = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}$.

【3909】 设 R 为矩形 $a \leqslant x \leqslant A$，$b \leqslant y \leqslant B$，函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续，证明等式：

$$\iint_R X(x)Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^A X(x)\mathrm{d}x \int_b^B Y(y)\mathrm{d}y.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对 y 后对 x 积分，即得

$$\iint_R X(x)Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B X(x)Y(y)\mathrm{d}y = \int_a^A X(x)\mathrm{d}x \int_b^B Y(y)\mathrm{d}y.$$

【3910】 设 $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$，计算 $I = \int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算，即得

$$I = \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]\mathrm{d}x = F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_a^A = F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

【3911】 设 $f(x)$ 为闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内的连续函数，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x) =$ 常数时等号成立.

证明思路 首先，证明不等式：$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，

事实上，只要在不等式 $\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y \geqslant 0$ 中将被积函数 $[f(x) - f(y)]^2$ 展开，并注意 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$，即可获证. 当 $f(x) =$ 常数时，显然上式中等号成立.

其次，证明：当 $\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 时，则 $f(x) =$ 常数. 事实上，此时有

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y = 0.$$

对函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y$ 利用 2205 题的结果，即可得 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 \mathrm{d}y = 0$. 再次对函数 $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$ 利用 2205 题的结果，即得 $f(x) =$ 常数.

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y = (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x) =$ 常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则有

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 \mathrm{d}y$ 是 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $F(x) \equiv 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. 特别 $F(a) = 0$，即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 = 0$. 又由于函数 $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$ 是 $a \leqslant y \leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $G(y) \equiv 0$ $(a \leqslant y \leqslant b)$. 因此，$f(y) \equiv f(a)$ $(a \leqslant y \leqslant b)$，即 $f(x) =$ 常数. 证毕.

【3912】 下列积分有怎样的符号？

(1) $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} \ln(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (2) $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (3) $\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$？

解 (1)由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln1=0$,且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$,故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(2)我们有 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3$,其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\qquad I_2>0,\qquad I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3)我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\-1\leqslant y\leqslant1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\-1\leqslant y\leqslant0}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant1\\0\leqslant y\leqslant1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零,第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数,因而,积分值是正的. 于是,原积分是正的.

【3913】 求函数 $f(x,y)=\sin^2x\sin^2y$ 在正方形:$0\leqslant x\leqslant\pi$,$0\leqslant y\leqslant\pi$ 内的平均值.

提示 所求平均值为积分 $\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 平均值 $I_0=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2=\frac{1}{4}$.

【3914】 利用中值定理估计积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2x+\cos^2y}$.

解题思路 注意到积分域的面积为 200,故由积分中值定理知,

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\quad 其中(\xi,\eta)\in 区域|x|+|y|\leqslant10.$$

显然有 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant2$,可以证明必有 $0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.

于是,可知 $1.96<I<2$.

解 由于积分域的面积为 200,故由积分中值定理知,

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot200=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\tag{1}$$

其中(ξ,η)为区域$|x|+|y|\leqslant10$ 中的某点.

显然 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant2$,我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\tag{2}$$

由于函数 $\cos^2x+\cos^2y$ 在有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant10$ 上的最大值为 2,最小值为 0. 从而,连续函数 $\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$在有界闭区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上的最小值为$\frac{1}{102}$,最大值为$\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$,则由(1)式知,

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

但 $f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}$是非负连续函数,从而,必有 $f(x,y)\equiv0$ (在区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上),即 $\cos^2x+\cos^2y\equiv2$ (在区域$|x|+|y|\leqslant10$ 上). 这显然是错误的. 由此可知,$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$. 同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$. 于是,(2)式成立. 从而,得 $\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}$, 即 $1.96<I<2$.

【3915】 求圆$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$上的点到原点的距离之平方的平均值.

解题思路 平均值 $I_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 可以求得

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\frac{R^2}{4},\qquad \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

从而,$I_0=a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$.

解 平均值 $I_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}\mathrm{d}x\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\left\{6b^2\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\,dx+2\int_{a-R}^{a+R}[R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}\right]\Bigg|_{a-R}^{a+R}+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{x-a}{8}[5R^2-2(x-a)^2]\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{x-a}{R}\right\}\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}+\frac{1}{3\pi R^2}\cdot\frac{3\pi R^4}{8}=b^2+\frac{R^2}{4}.$$

同理,有
$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

于是,$I_0=a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$.

在问题 3916～3922 中,对二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$内按所给区域$\Omega$依两个不同的顺序安置积分的上下限.

【3916】 Ω—以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,1)$为顶点的三角形.

解 为方便起见,将二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$记作$I$. 于是,

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3917】 Ω—以$O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$为顶点的三角形.

提示 注意直线OA的方程为$y=\frac{1}{2}x$,OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$及AB的方程为$y=1$.

解 如图 8.1 所示,OA的方程为$y=\frac{1}{2}x$,OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$,AB的方程为$y=1$. 于是,

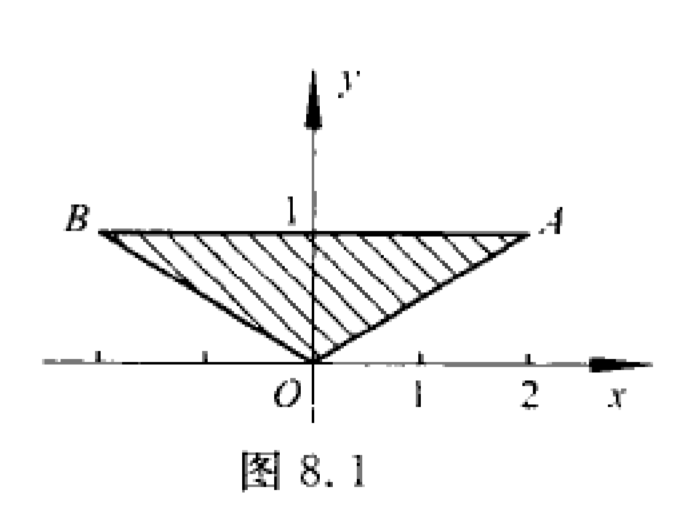


图 8.1

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【3918】 Ω—以$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$为顶点的梯形.

解 如图 8.2 所示,BC的方程为$y-1=x$. 于是,

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

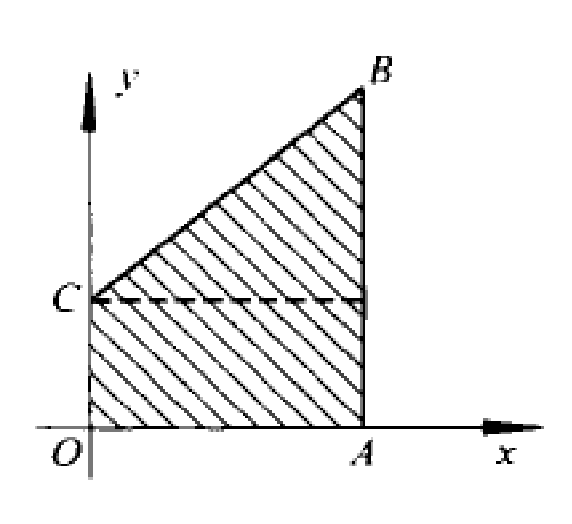


图 8.2

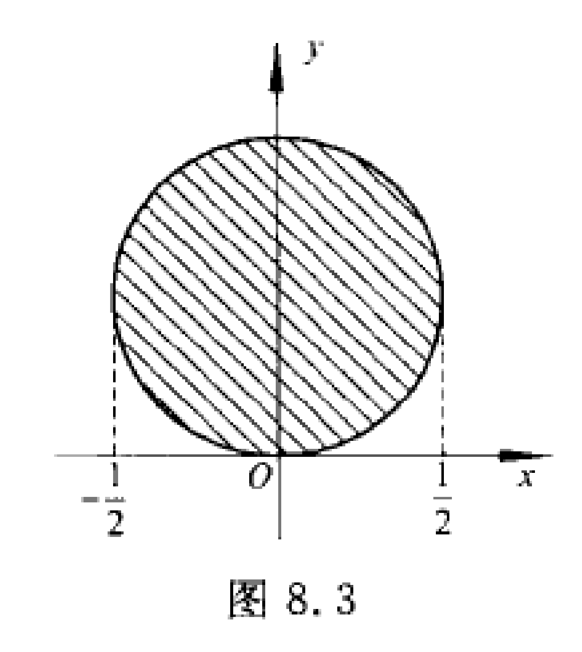


图 8.3

【3919】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

【3920】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant y$.

提示 *积分域 Ω 为 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2$.*

解 如图 8.3 所示. 积分域 Ω 为 $x^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant(\frac{1}{2})$, 其围线为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是,

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3921】 Ω—被曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所包围的区域.

解 曲线 $y=x^2$ 及 $y=1$ 的交点为 $(1,-1)$, $(1,1)$. 于是,

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3922】 Ω—圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图 8.4 所示. 若先对 y 后对 x 积分, 则

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right\}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

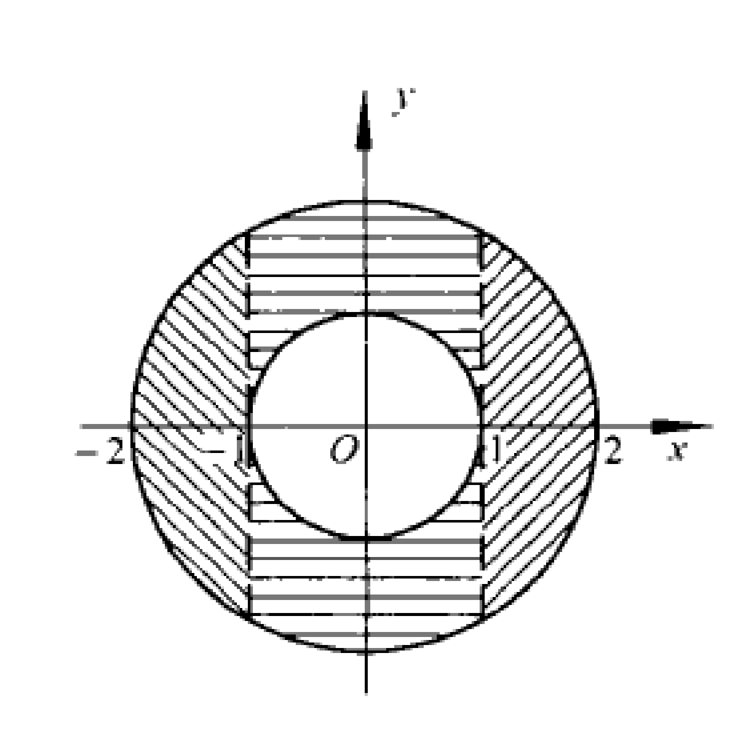


图 8.4

若先对 x 后对 y 积分, 则

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3923】 证明狄利克雷公式:

$$\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{y}^{a}f(x,y)\mathrm{d}x\quad(a>0).$$

证明思路 *注意公式左端的逐次积分, 等于积分*

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为三角形域 OAB: $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,a)$, 改变积分的顺序, 公式即可获证.

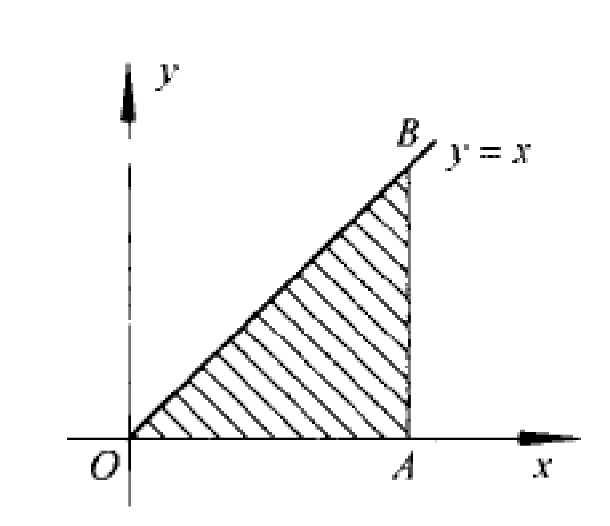


图 8.5

证 公式左端的逐次积分, 等于积分 $\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Ω 为三角形域 OAB(图 8.5): $O(0,0)$, $A(a,0)$,

$B(a,a)$. 对于该积分，若化为先对 x 后对 y 的逐次积分，即为公式的右端. 于是，本题获证.

在下列积分中改变积分的顺序：

【3924】 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

提示 注意积分域的围线为 $y=x$，$y=2x$ 及 $x=2$. 它是一个三角形域，其顶点为(0,0)，(2,2)及(2,4).

解 积分域的围线为：$y=x$，$y=2x$ 及 $x=2$，如图 8.6 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

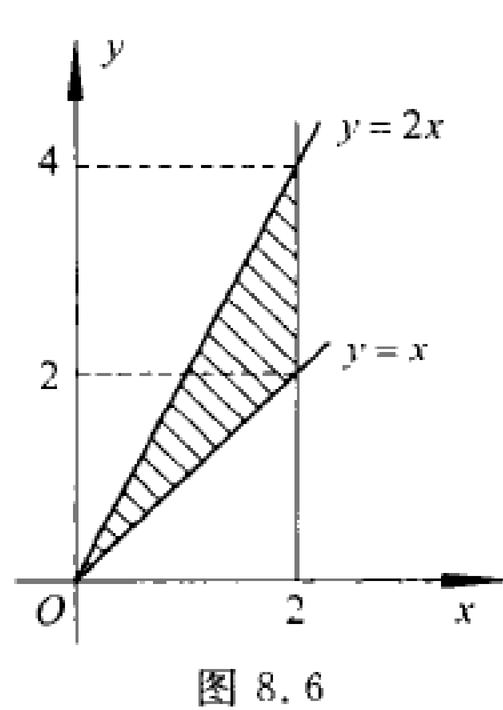


图 8.6

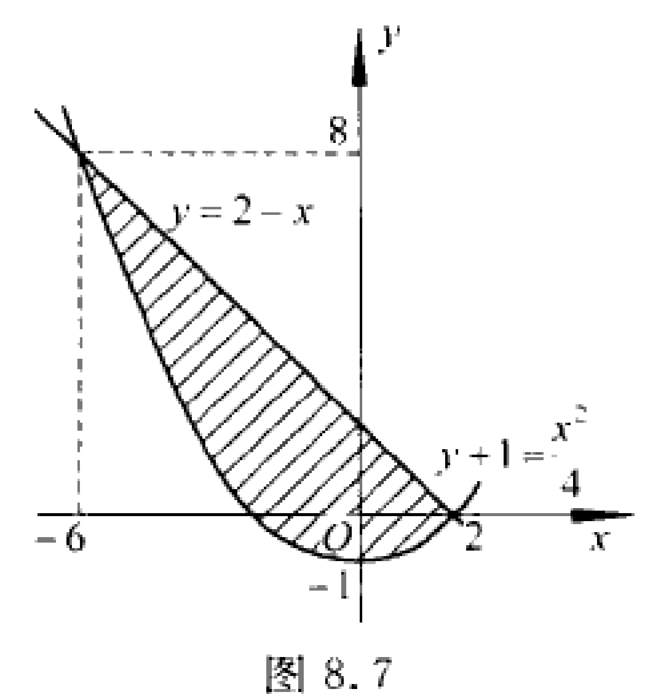


图 8.7

【3925】 $\int_{-6}^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

提示 注意积分域的围线为 $y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点为(2,0)及(−6,8).

解 积分域的围线为：$y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点为(2,0)，(−6,8)，如图 8.7 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^8 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3926】 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

提示 注意积分域的围线为 $y=x^2$ 及 $y=x^3$，其交点为(0,0)及(1,1).

解 积分域的围线为：$y=x^2$ 及 $y=x^3$，其交点为(0,0)，(1,1)，如图 8.8 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

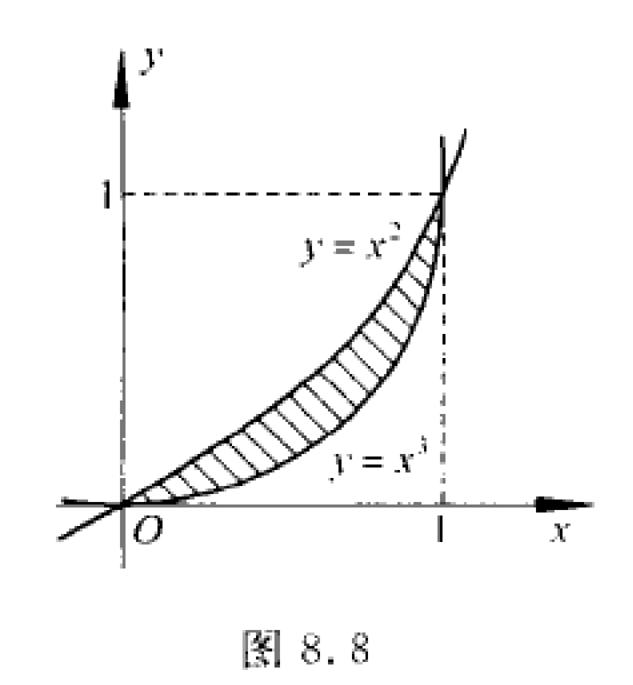


图 8.8

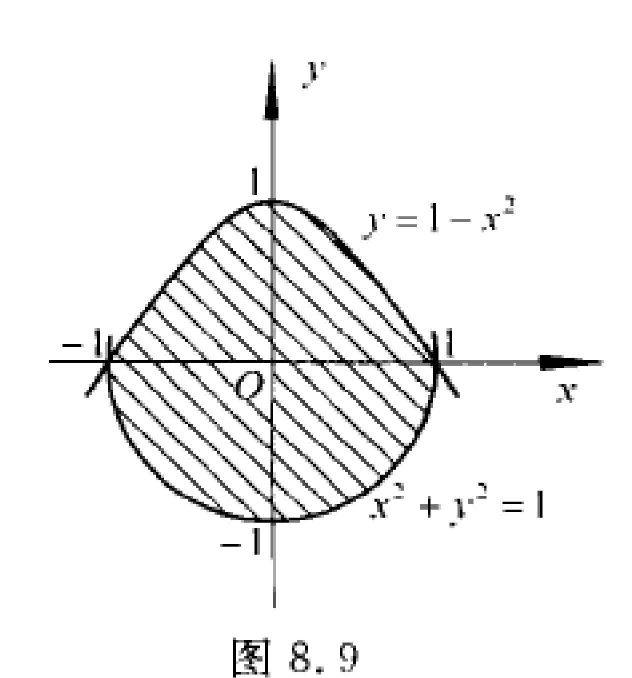


图 8.9

【3927】 $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$，其交点为(−1,0)及(1,0).

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线$y=1-x^2$，如图 8.9 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3928】 $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2+y^2=2x$ 或 $(x-1)^2+y^2=1$ 及直线 $y=2-x$，其交点为 $(2,0)$ 及 $(1,1)$.

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=2x$ 或 $(x-1)^2+y^2=1$ 及直线 $y=2-x$，其交点为 $(2,0)$，$(1,1)$，如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

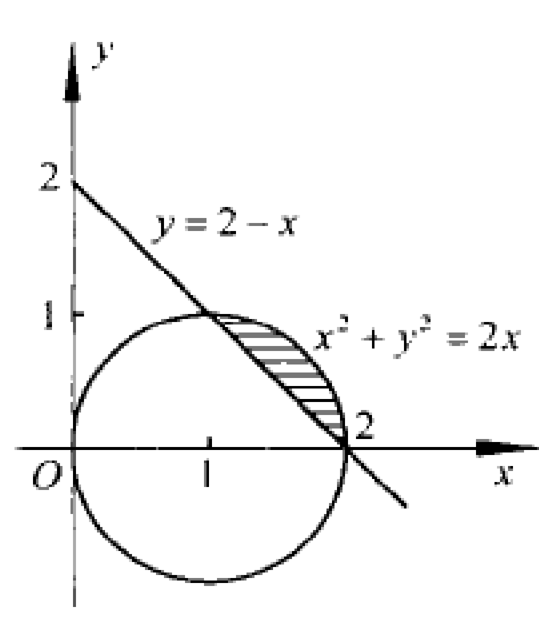


图 8.10

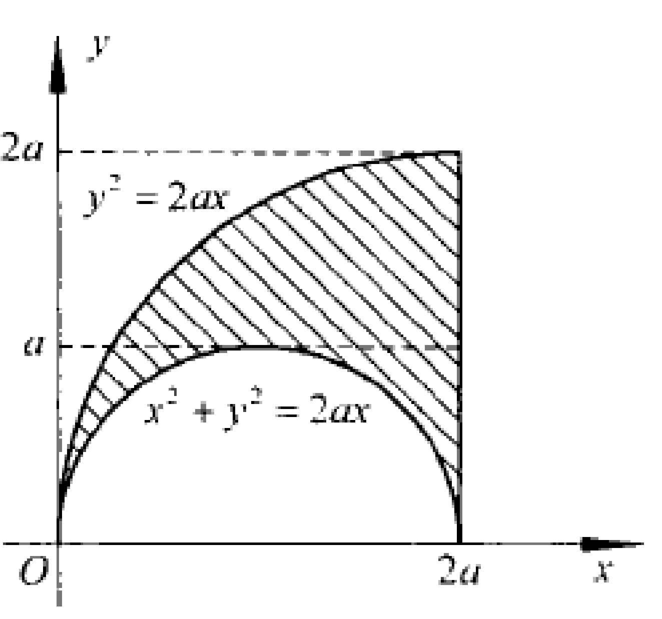


图 8.11

【3929】 $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$.

提示 注意积分域的围线由圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$，抛物线 $y^2=2ax\ (y\geqslant 0)$ 及直线 $x=2a$ 组成，其交点为 $(0,0)$ 及 $(2a,0)$.

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$，$y^2=2ax\ (y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy=\int_0^a dy\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx\right\}+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

【3930】 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$.

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

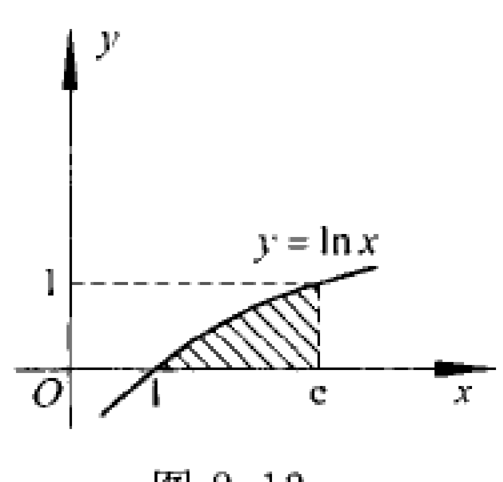


图 8.12

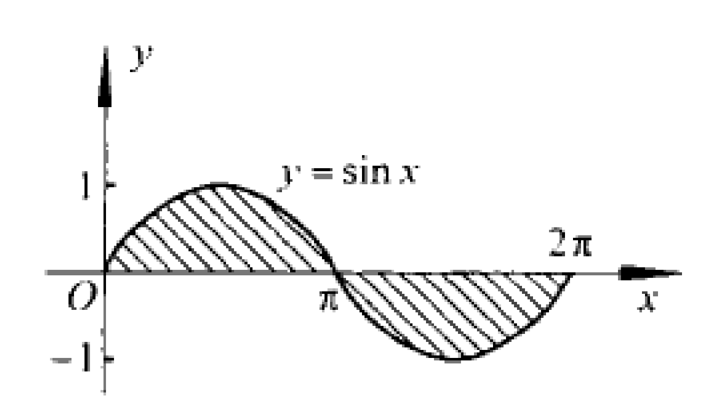


图 8.13

【3931】 $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y=\sin x$ 的反函数，当 y 从 0 变到 1 时为 $x=\arcsin y$，当 y 从 1 变到 -1 时 $x=\pi-\arcsin y$，当 y 从 -1 变到 0 时为 $x=2\pi+\arcsin y$，故改变积分的顺序，即得

$$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

计算下列积分：

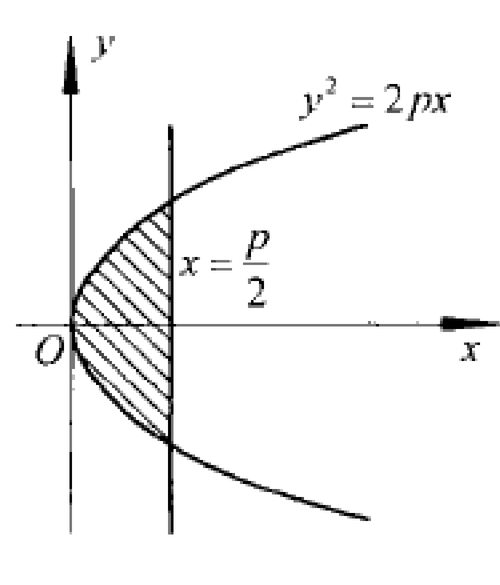


图 8.14

【3932】 $\iint\limits_{\Omega} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是被抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\dfrac{p}{2}$ $(p>0)$ 所包围的区域.

解 积分域如图 8.14 所示. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{2}{3}x\sqrt{(2px)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{p^5}{21}.$$

【3933】 $\iint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$，其中 Ω 是以圆心在点 (a,a) 半径为 a 的圆周(它与坐标轴相切)的较短弧和坐标轴为界的区域.

提示 注意积分域 Ω 的围线为圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 与两坐标轴相切的较短弧及直线 $x=0$，$y=0$，因而，当 x 从 0 变到 a 时，对于每一个固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$.

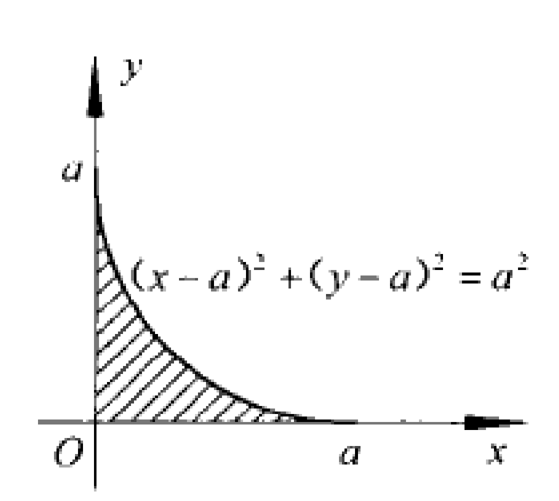


图 8.15

解 如图 8.15 所示. 当 x 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}-\int_0^a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

【3934】 $\iint\limits_{\Omega}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是以 a 为半径，坐标原点为圆心的圆.

提示 原式 $=\int_{-a}^{a}|x|\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|y|\mathrm{d}y$. 并注意被积函数均为偶函数及积分区间的对称性.

解 $\iint\limits_{\Omega}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|xy|\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)|x|\mathrm{d}x=2\int_0^a(a^2-x^2)x\mathrm{d}x=\dfrac{a^4}{2}.$

【3935】 $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是以 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$ 和 $y=3a$ $(a>0)$ 为边的平行四边形.

提示 宜选择先对 x 后对 y 积分较好.

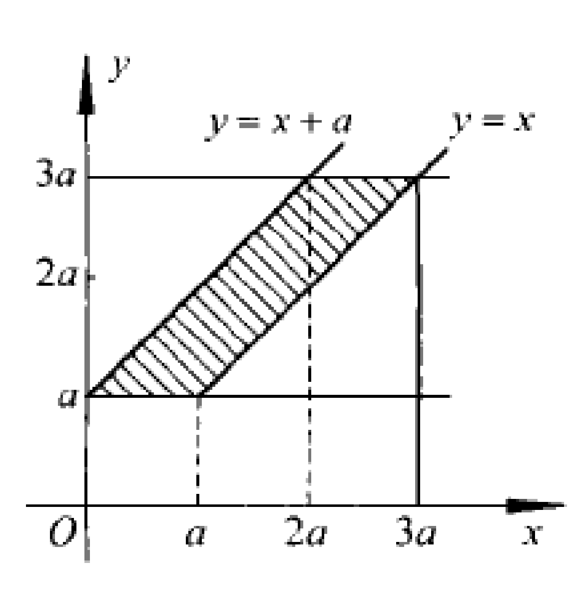
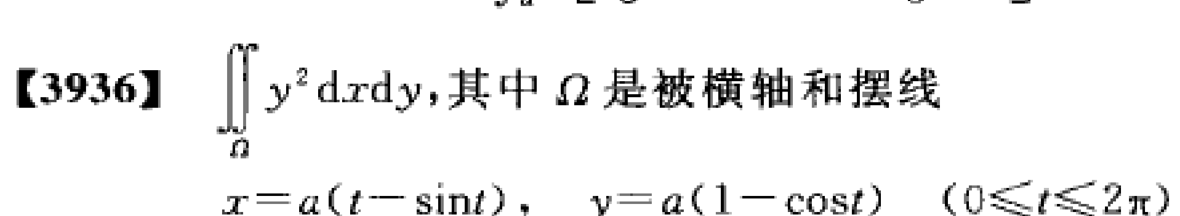


图 8.16

解 如图 8.16 所示. 当 y 从 a 变到 $3a$ 时，对于每一固定的 y，x 从 $y-a$ 变到 y. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]\mathrm{d}y=\frac{168a^4}{12}=14a^4.$$



【3936】 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是被横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

提示 利用 2281 题及 2282 题的结果.

解 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^y y^2\mathrm{d}x=\dfrac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\dfrac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\mathrm{d}u$

$=\dfrac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8u\mathrm{d}u\right\}=\dfrac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8u\mathrm{d}u\right\}=\dfrac{2^5a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u^{*)}$

$=\dfrac{2^5a^4}{3}\cdot 2\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\dfrac{\pi}{2}^{**)}=\dfrac{35}{12}\pi a^4.$

*) 利用 2282 题的结果.

**) 利用 2281 题的结果.

在二重积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中,令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r 和 φ,并配置积分的限,设:

【3937】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 雅可比行列式 $I=r$,以下各题不再写出. φ 从 0 变到 2π,r 从 0 变到 a. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3938】 Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant ax\quad(a>0)$.

解 圆 $x^2+y^2\leqslant ax$ 即 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$,其围线的极坐标方程为 $r=a\cos\varphi$. 当 φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $a\cos\varphi$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3939】 Ω—环 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$.

提示 注意当 φ 从 0 变到 2π 时,r 从 $|a|$ 变到 $|b|$.

解 φ 从 0 变到 2π,r 从 $|a|$ 变到 $|b|$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{|a|}^{b} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3940】 Ω—三角形 $0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1-x$.

提示 注意直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ 及 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

解 由于直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

因而当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3941】 Ω—区域 $-a\leqslant x\leqslant a$;$\frac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$.

解题思路 注意抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$ 及直线 $y=a$ 的极坐标方程分别为 $r=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 及 $r=\frac{a}{\sin\varphi}$. 又 φ 的积分范围 $[0,\pi]$ 应分为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 及 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

解 如图 8.17 所示. 区域 Ω 可分为三部分:

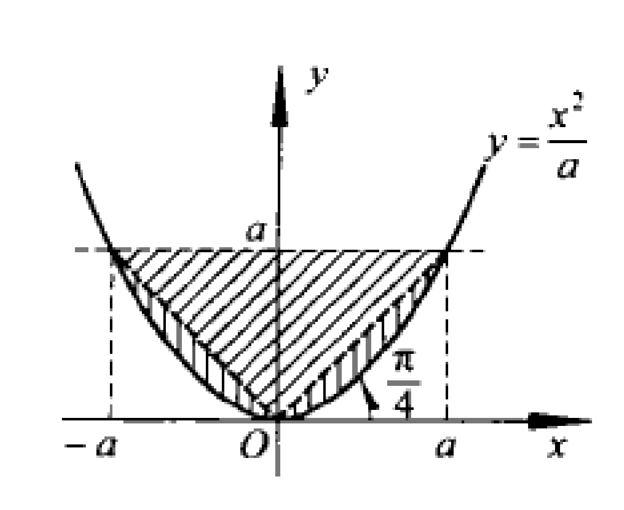


图 8.17

(1)当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$,其中 $r=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程;

(2)当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\frac{a}{\sin\varphi}$;

(3)当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

于是,

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,r\cos\varphi)r\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3942】 在怎样的情况下，当变换为极坐标之后，积分的上下限是常数？

提示 当且仅当积分域为由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成.

解 若变换为极坐标，积分 $\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_a^b f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$，

其中 α、β、a、b 均为常数，则表明积分域 Ω 为 $a\leqslant r\leqslant b$，$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. 它表示圆环面 $a\leqslant r\leqslant b$ 被射线 $\varphi=\alpha$，$\varphi=\beta$ 截出的部分，且只有积分域是这种情况，变换为极坐标后积分的上下限才是常数. 如 3937 题及 3939 题即为其特例.

在下列积分中，令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$，变换为极坐标 r 和 φ，并依两种不同的顺序配置积分的上下限：

【3943】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 如图 8.18 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\sec\varphi$；当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\csc\varphi$.

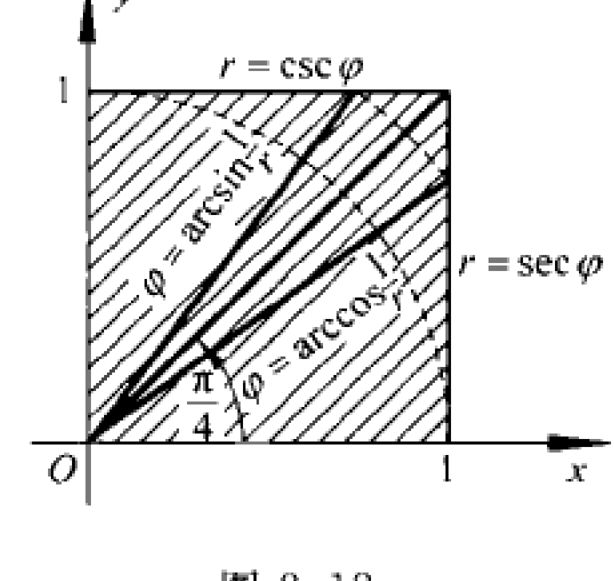


图 8.18

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{1}{r}$. 于是，

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

下面的 3944 题～3950 题均可仿本题的思路来求解.

【3944】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 如图 8.19 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})$ 变到 1. 若先对 φ 积分，则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$，其中直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)=\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4}-\varphi=\pm\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$.

图 8.19

于是，

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

【3945】 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$.

解 如图 8.20 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时，φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$；当 r 从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是，

图 8.20

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,\mathrm{d}r.$$

【3946】* $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解 如图 8.21 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos\varphi}$，其中 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程.

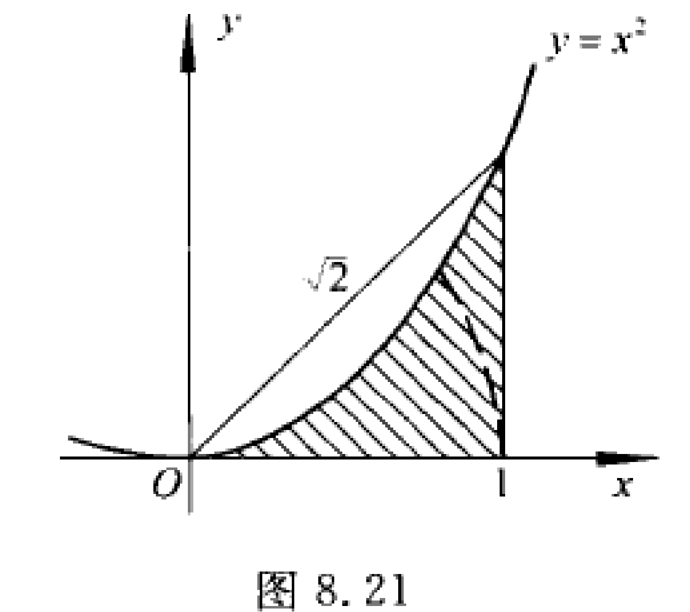


图 8.21

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，对于每一固定的 r，φ 从 0 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$（由 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 解出 φ）；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

【3947】 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 Ω 由曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (x\geqslant 0)$ 围成.

解 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (x\geqslant 0)$ 的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\varphi$，其图像是双纽线的右半部分，如图 8.22 所示.

若先对 r 积分，则当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

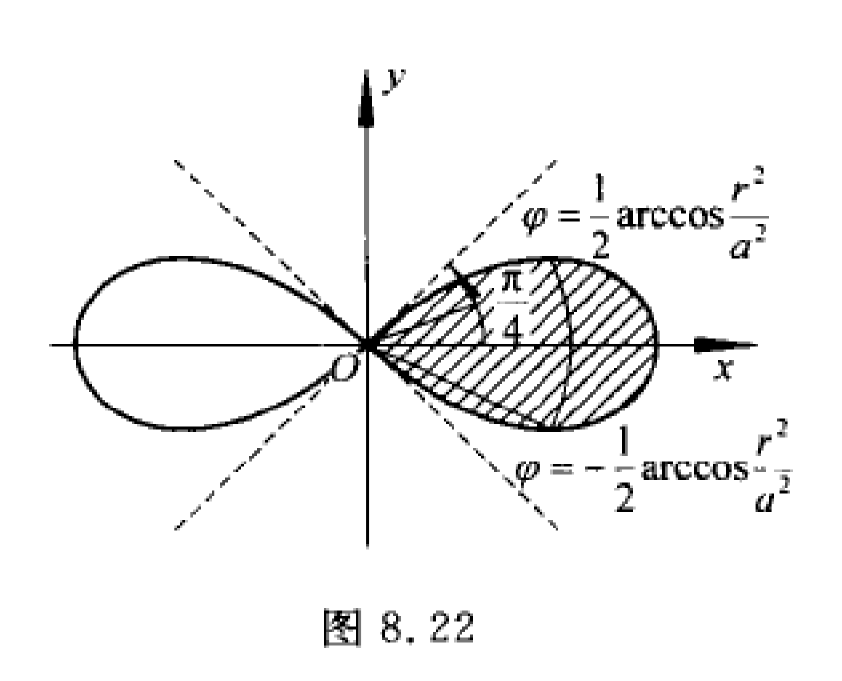


图 8.22

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a r\,\mathrm{d}r \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r.$$

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

令 r 和 φ 为极坐标，在下列积分中变更积分的顺序：

【3948】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr \quad (x \geqslant 0)$.

解 积分域为由圆 $r=a\cos\varphi$ 或 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 所围成的圆域.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 变到 $\arccos\frac{r}{a}$（图 8.23）. 于是，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)d\varphi.$$

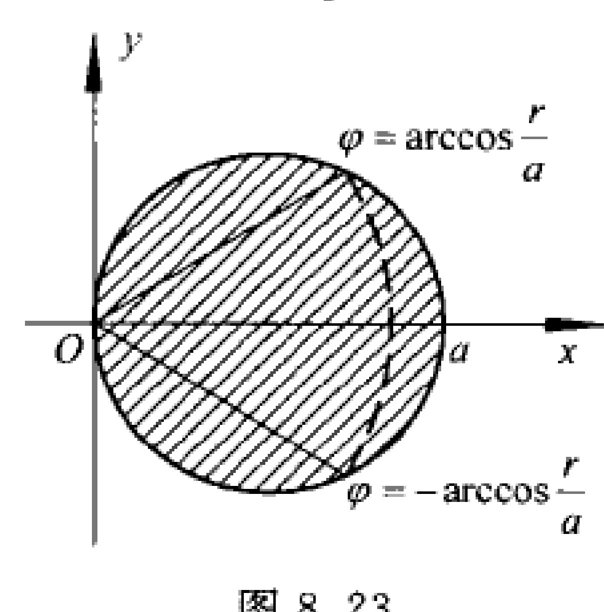


图 8.23

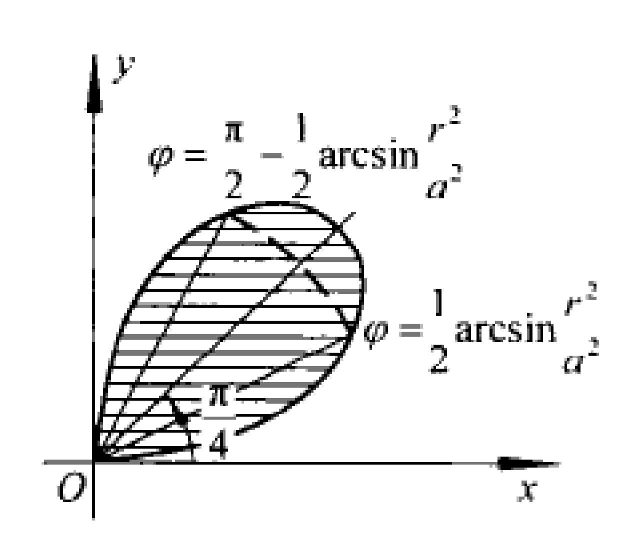


图 8.24

【3949】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)dr \quad (a>0)$.

解 积分域由双纽线 $r^2=a^2\sin 2\varphi$ 的右上部分围成（图8.24）.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)dr = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi,r)d\varphi.$$

【3950】 $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,r)dr. \quad (0<a<2\pi)$.

解 积分域由曲线 $r=\varphi$（阿基米德螺线）与射线 $\varphi=a$ 围成（图 8.25）.

改变积分顺序，即得

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,r)dr = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi,r)d\varphi.$$

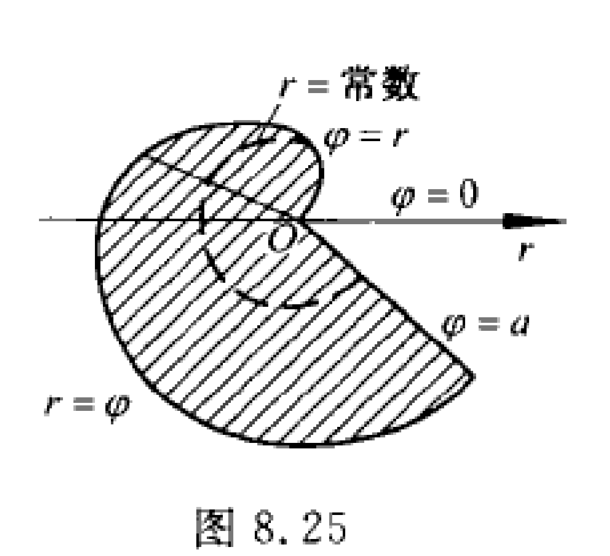


图 8.25

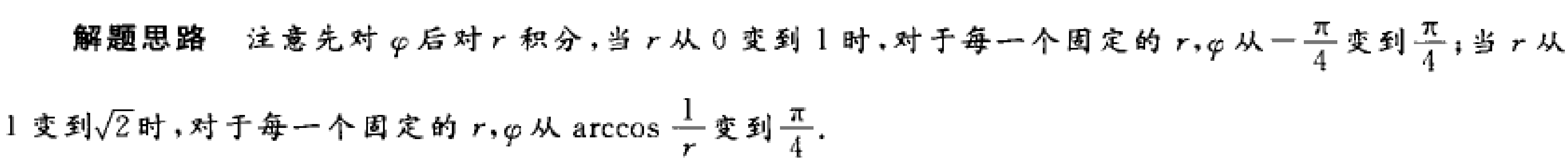
变换成极坐标，把二重积分化为一重积分：

【3951】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$.

提示 注意先对 r 再对 φ 积分，即易获解.

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(r)rdr = 2\pi\int_0^1 rf(r)dr.$

【3952】 $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 $\Omega=\{|y|\leqslant|x|;|x|\leqslant 1\}$.


解题思路 注意先对 φ 后对 r 积分，当 r 从 0 变到 1 时，对于每一个固定的 r，φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一个固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$.

注意到积分域 Ω 关于 x 轴及 y 轴的对称性，故当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，应在所得的积分表达式前面乘以常数 2，而当 φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，则应在所得的积分表达式前面乘以常数 4. 这一点务请读者注意，否

则就会产生错误.

解 积分域 Ω 如图 8.26 所示. 先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 1 时, φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$;当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时,对于每一固定的 r,φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是,

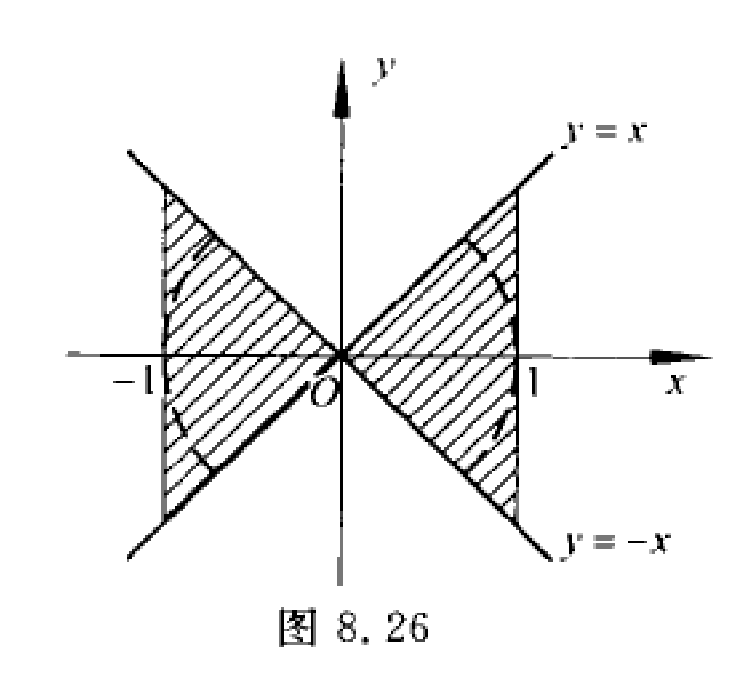


图 8.26

$$\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r.$$

【3953】 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示 注意先对 r 再对 φ 积分,当 r 从 0 变到 $\cos\varphi$ 时,对于每一个固定的 r,φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$,问题即可获解.

解 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} f(\tan\varphi)r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi.$

变换成极坐标,计算下列二重积分:

【3954】 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域 Ω 为 $\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant a\}$.

解 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^3}{3}.$

【3955】 $\displaystyle\iint_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域 Ω 为 $\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \pi\leqslant r\leqslant 2\pi\}$.

解 $\displaystyle\iint_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=-6\pi^2.$

【3956】 利用函数组

$$u=\frac{y^2}{x},\qquad v=\sqrt{xy}$$

把正方形 $S\{a<x<a+h, b<y<b+h\}(a>0, b>0)$ 变换为区域 S'. 求区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比. 当 $h\to 0$ 时,此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a,b)$, $B(a+h,b)$, $C(a+h,b+h)$, $D(a,b+h)$ 对应于 Ouv 平面上的点

$$A'\left(\frac{b^2}{a},\sqrt{ab}\right),\qquad B'\left(\frac{b^2}{(a+h)^2},\sqrt{(a+h)b}\right),$$
$$C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h},\sqrt{(a+h)(b+h)}\right),\qquad D'\left(\frac{(b+h)^2}{a},\sqrt{a(b+h)}\right).$$

正方形的四边 $y=b$, $x=a+h$, $y=b+h$, $x=a$ 对应于 Ouv 平面上的四条曲线,即

$$A'B':u=\frac{b^3}{v^2};\quad B'C':u=\frac{v^4}{(a+h)^3};\quad C'D':u=\frac{(b+h)^3}{v^2};\quad D'A':u=\frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的区域即为 S'(图 8.27).

于是,区域 S' 的面积为

$$S'=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}}\frac{v^4}{a^3}\mathrm{d}v+\int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{(b+h)^3}{v^2}\mathrm{d}v-\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}}\frac{b^3}{v^2}\mathrm{d}v$$

$$-\int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{v^4}{(a+h)^3}\mathrm{d}v=\frac{1}{5a^3}\left[\sqrt{a^5(b+h)^5}-\sqrt{a^5b^5}\right]$$

$$+(b+h)^3\left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\right]-b^3\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)b}}\right]$$

$$-\frac{1}{5(a+h)^3}\left[\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5}-\sqrt{(a+h)^5b^5}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right].$$

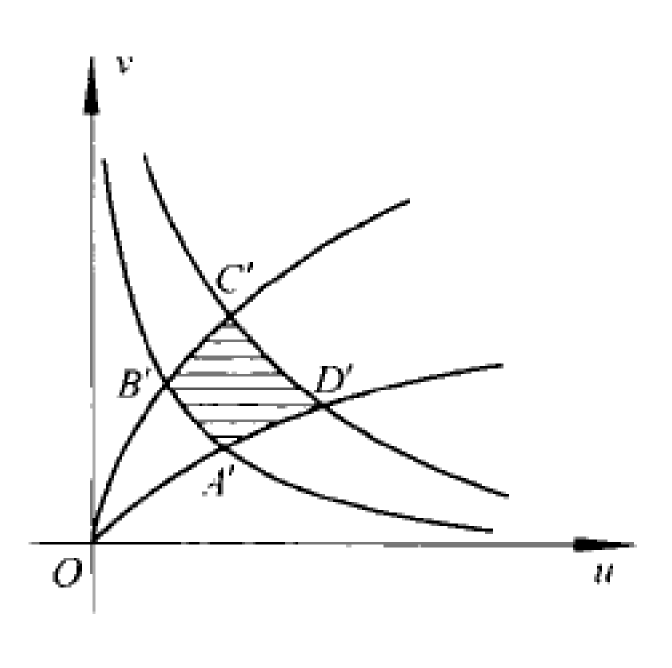


图 8.27

从而，区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比为

$$\frac{S'}{S}=\frac{6}{5h^2}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right]=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right](\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}{h^2\sqrt{a(a+h)}}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})(\sqrt{b+h}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})}.$$

上述比式是 h 的函数，并且在 $h=0$ 点连续. 于是，

$$\mathop{\mathrm{lin}}_{h\to0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5b^2}{4\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上，应用洛必达法则求此极限更简单些，这是因为

$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{5}{2}\sqrt{(b+h)^3}=\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}(a+h)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是，
$$\lim_{h\to0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意 若利用二重积分的变量代换，则计算 S' 较为简单，容易算得

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$

故 $S'=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{S}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_a^{a+h}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_b^{b+h}y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)(\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5})$

与上述结果一致. 但是，从原习题集的安排来看，似乎应从 3965 题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量 u,v 来代替 x,y 并确定下列二重积分中的积分限：

【3957】 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\mathrm{d}y\quad(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$，令

$$u=x,\qquad v=\frac{y}{x}.$$

提示 注意在所给变换 $u=x,v=\frac{y}{x}$ 下，积分域由 $a\leqslant x\leqslant b,\alpha x\leqslant y\leqslant\beta x$ 变为 $a\leqslant u\leqslant b,\alpha\leqslant v\leqslant\beta$，且变换的雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1&0\\v&u\end{vmatrix}=u>0.$$

解 在变换 $u=x, v=\frac{y}{x}$ 下，区域 $\Omega=\{a\leqslant x\leqslant b, \alpha x\leqslant y\leqslant \beta x\}$ 变为 $\Omega'=\{a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant \beta\}$. 变换的雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix}=u>0.$$

于是
$$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy=\int_a^b u du\int_\alpha^\beta f(u,uv)dv.$$

【3958】 $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$，令 $u=x+y, v=x-y$.

提示 在变换 $u=x+y$，$v=x-y$ 下，积分域由 $0\leqslant x\leqslant 2, 1-x\leqslant y\leqslant 2-x$ 变为 $1\leqslant u\leqslant 2$，$-u\leqslant v\leqslant 4-u$，且变换的雅可比行列式 $I=-\frac{1}{2}, x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$.

解 在变换 $u=x+y$，$v=x-y$ 下，区域 $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 2, 1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$ 变为 $\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2, -u\leqslant v\leqslant 4-u\}$. 事实上，$u+v=2x, u-v=2y$，故 $0\leqslant u+v\leqslant 4$，即 $-u\leqslant v\leqslant 4-u$. 变换的雅可比行列式 $I=-\frac{1}{2}$，从而，$|I|=\frac{1}{2}$，且 $x=\frac{y+v}{2}, y=\frac{y=v}{2}$. 于是，

$$\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv.$$

【3959】 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，其中 Ω 是被曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$x=0, y=0(a>0)$ 所包围的区域，令

$$x=u\cos^4 v,\qquad y=u\sin^4 v.$$

提示 注意 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\quad y=a\sin^4 v\quad \left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于所给变换，有 $|I|=4|u\cos^3 v\cdot\sin^3 v|$，且积分域 Ω 变为 $\Omega'=\left\{0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

解 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\qquad y=a\sin^4 v\quad \left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$，有 $|I|=4|u\cos^3 v\sin^3 v|$，且区域 Ω 变为 $\Omega'=\left\{0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=4\int_0^a u du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v, v\sin^4 v)dv$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v dv\int_0^a u f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)du.$$

【3960】 证明：变量代换 $x+y=\xi, y=\xi\eta$ 把三角形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$ 变为单位正方形 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$.

证 由 $0\leqslant y\leqslant 1-x$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得 $0\leqslant x+y\leqslant 1$，即 $0\leqslant\xi\leqslant 1$. 又 $\eta=\frac{y}{\xi}\leqslant\frac{y}{0+y}=1$，且 $\eta\geqslant 0$，故 $0\leqslant\eta\leqslant 1$.

反之，从 $0\leqslant\xi\leqslant 1, 0\leqslant\eta\leqslant 1$，得 $0\leqslant x+y\leqslant 1, y=\xi\eta, x=\xi(1-\eta)$，故 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$. 因此，三角形域 $\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ 变为正方形域 $\{0\leqslant\xi\leqslant 1, 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$.

【3961】 在怎样的变量代换下，由曲线 $xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y-1=0(x>0, y>0)$ 围成的曲线四边形被变换成矩形，且其边平行于坐标轴？

提示 宜作变换 $xy=u, x-y=v$.

解 原四条曲线为 $xy=1, xy=2, x-y=-1, x-y=1(x>0, y>0)$，故显然应作变换 $xy=u, x-y=v$. 这时 u 从 1 变到 2，v 从 -1 变到 1，故原积分域变为区域：$1\leqslant u\leqslant 2, -1\leqslant v\leqslant 1$.

进行适当的变量代换，把二重积分化为一重积分：

【3962】 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

提示 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$. 则有 $|I|=\frac{1}{2}$，且 u 从 -1 变到 1，v 也从 -1 变到 1.

解 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$，则有 $|I|=\frac{1}{2}$，且 u 从 -1 变到 1，v 从 -1 变到 1. 于是，

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

【3963】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (a^2+b^2\neq 0)$.

提示 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$，则有 $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2$. 故区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2\leqslant 1$，且有 $|I|=1$.

解 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$，则有 $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2\leqslant 1$，故区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2\leqslant 1$，且有 $|I|=1$. 于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}v=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}u.$$

【3964】 $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中区域 Ω 由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x\,(x>0, y>0)$ 围成.

提示 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$，即 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$. 则区域 Ω 变为区域

$$\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}, \quad 且\ |I|=\frac{1}{2v}.$$

解 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$，则区域 Ω 变为区域 $\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$，且 $|I|=\frac{1}{2v}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}v}{2v}\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u.$$

计算下列二重积分：

【3965】 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 Ω 由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 围成.

提示 作变换 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$. 则区域 Ω 变为区域

$$\Omega'=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad 且\ |I|=r.$$

解 区域 Ω 即圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. 作变换：$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则区域 Ω 变区域 $\Omega'=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，且 $|I|=r$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[r+r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)]\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

【3966】 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

提示 注意积分域的对称性.

解 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$.

【3967】 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其积分域 Ω 是椭圆区域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

提示 作变换 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$,则区域 Ω 变为区域 $\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$,且有 $|I|=abr$.

解 作变换 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$,则区域 Ω 变为区域 $\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$,且 $|I|=abr$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{2\pi ab}{3}.$$

【3968】 $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

提示 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$,利用对称性及 1712 题的结果.

解 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$,并利用对称性,则有

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}}r^3\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi\mathrm{d}\tan\varphi}{1+\tan^4\varphi}$$

$$=2\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^{1\,*)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用 1712 题的结果.

【3969】 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其积分域 Ω 由曲线 $y^2=2x, x+y=4, x+y=12$ 围成.

解 由解方程组 $\begin{cases}x+y=4,\\ y^2=2x\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x+y=12,\\ y^2=2x\end{cases}$

求得两条直线与抛物线的交点为 $A(2,2), B(8,4), C(18,-6), D(8,-4)$(图 8.28). 于是,

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x+\int_{-4}^{2}\mathrm{d}y\int_{4-y}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x=79\frac{13}{15}+384+79\frac{13}{15}$$

$$=543\frac{11}{15}.$$

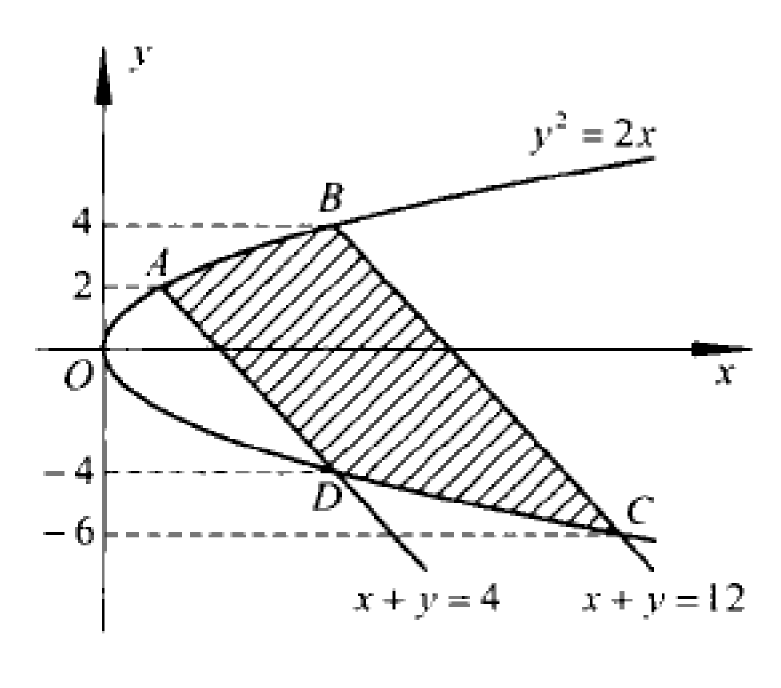


图 8.28

【3970】 $\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Ω 是由曲线 $xy=1, x+y=\frac{5}{2}$ 围成的区域.

解 曲线 $xy=1$ 与直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 的交点为$(\frac{1}{2},2)$, $(2,\frac{1}{2})$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

【3971】 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\mathrm{d}y+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\left[\sin(x+\pi)-\sin\frac{\pi}{2}\right]\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{-(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin x)+\left[\sin(x+\pi)-\sin\frac{3\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2dx=2\pi.$$

【3972】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy.$

解 积分域如图 8.29 所示，由 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 和 Ω_4 所组成，其中 Ω_1 为由圆 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=0$，即圆 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$ 围成的区域，该圆的极坐标方程为 $r=\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})$，而圆 $x^2+y^2=1$ 的极坐标方程为 $r=1$. 于是，各区域分别为

$$\Omega_1:-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\Omega_2:\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_3:\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_4:-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1.$$

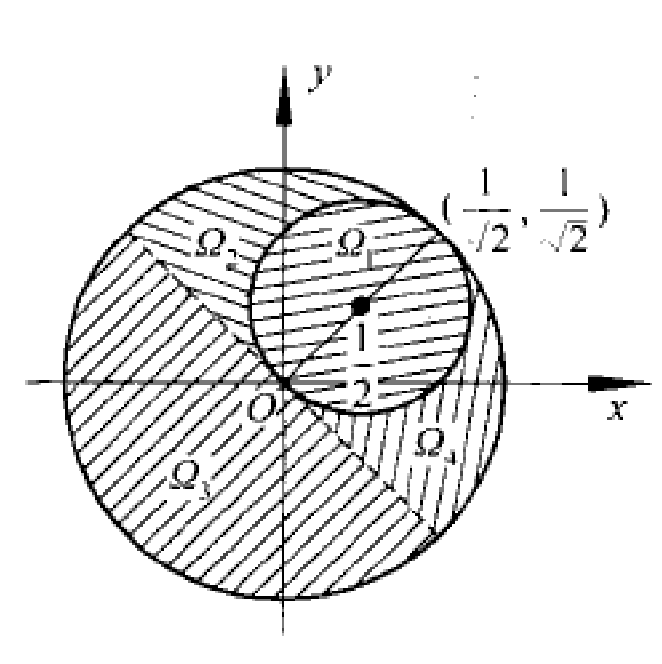


图 8.29

当点在 Ω_1 中时，由于 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\geqslant 0$，故

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2;$$

当点在 Ω_2、Ω_3 和 Ω_4 中时，

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

于是，注意到利用对称性即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}\left[r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]rdr+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1}\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]rdr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]rdr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{\pi}{32}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{32}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\pi}{16}.$$

*） 利用 2281 题的结果.

【3973】+ $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy.$

提示 注意 $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}\,dxdy+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}\,dxdy$,

并在积分过程中作代换 $x=\sqrt{2}\sin t$ 及利用 1750 题的结果.

解 $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}\,dxdy+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}\,dxdy$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3dx+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分:

【3974】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy.$

解题思路 注意:当 $y^2-x^2<2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$;当 $y^2-x^2>2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当 $y^2-x^2=2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

现将区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 及 Ω_5 五个子域,其中每一个子域的围线为

$\Omega_1: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y>0$;　　$\Omega_2: y^2-x^2=2, x=-1, x=1$;

$\Omega_3: x^2+y^2=4, x=-1$;　　$\Omega_4: x^2+y^2=4, x=1$;

$\Omega_5: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y<0$.

当点在 Ω_1 及 Ω_5 时,$y^2-x^2>2$,故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;

当点在 Ω_2,Ω_3 及 Ω_4 中时,$y^2-x^2<2$,故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$.

从而,问题可获解.

解 当 $y^2-x^2<2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$;当 $y^2-x^2>2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当 $y^2-x^2=2$ 时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

现将区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 和 Ω_5 五部分,其界线分别为 $x^2+y^2=4$, $y^2-x^2=2$, $x=\pm 1$(图 8.30).当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时,$y^2-x^2>2$,故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当点在 Ω_2、Ω_3 和 Ω_4 中时,$y^2-x^2<2$,故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$. 于是,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega_1}dxdy-\iint\limits_{\Omega_5}dxdy+\iint\limits_{\Omega_2}dxdy+\iint\limits_{\Omega_3}dxdy+\iint\limits_{\Omega_4}dxdy$$

$$=-4\int_0^1dx\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy+4\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2+x^2}}dy+4\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dy$$

$$=8\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,dx+4\left(\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

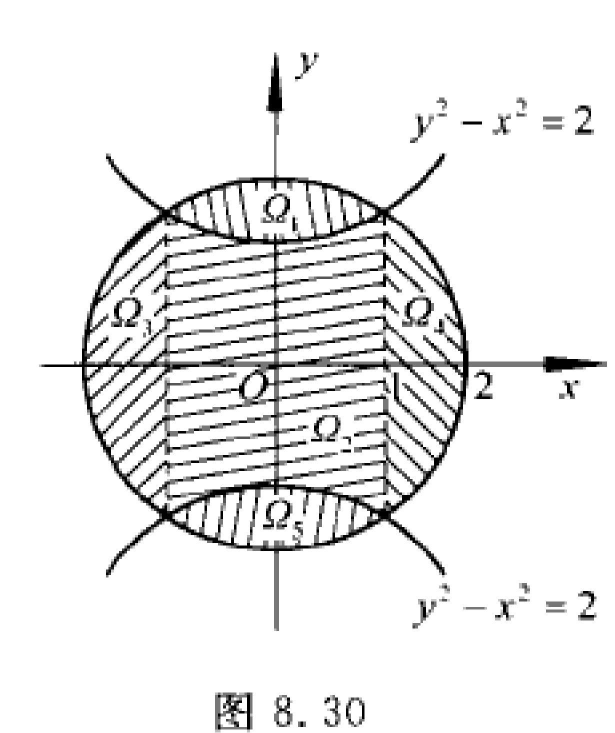


图 8.30

【3975】 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]dxdy.$

解题思路 注意:

当 $0\leqslant x+y<1$ 时,$[x+y]=0$;当 $1\leqslant x+y<2$ 时,$[x+y]=1$;当 $2\leqslant x+y<3$ 时,$[x+y]=2$;当 $3\leqslant x+y<4$ 时,$[x+y]=3$;当 $x+y=4$ 时,$[x+y]=4$.

现将区域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$ 分成四个子域 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 及 Ω_4,它们依次为

$\Omega_1: x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$；　　$\Omega_2: 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ x=0,\ y=0$；

$\Omega_3: 2\leqslant x+y\leqslant 3,\ x=2,\ y=2$；　　$\Omega_4: x+y\geqslant 3,\ x\leqslant 2,\ y\leqslant 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=2$；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$.

注意 $\iint\limits_{\Omega_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为区域 Ω_i 的面积 $(i=1,2,3,4)$，问题即易获解.

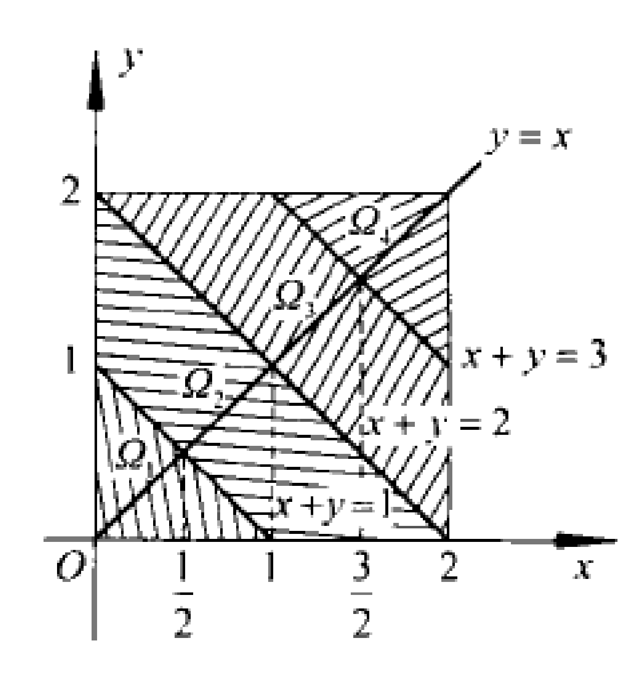


图 8.31

解　当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；　当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；

当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；　当 $3\leqslant x+y<4$ 时，$[x+y]=3$；

当 $x+y=4$ 时，$[x+y]=4$.

如图 8.31 所示，区域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$ 可分为下列四部分：

$\Omega_1: x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$；　　$\Omega_2: 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ x=0,\ y=0$；

$\Omega_3: 2\leqslant x+y\leqslant 3,\ x=2,\ y=2$；　　$\Omega_4: x+y\geqslant 3,\ x\leqslant 2,\ y\leqslant 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=2$；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$. 于是，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}\mathrm{d}y\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{x}\mathrm{d}y+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{3-x}\mathrm{d}y\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{3-x}^{x}\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2x-2)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x-3)\mathrm{d}x=6.$$

【3976】　$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解题思路　注意：

当 $x^2\leqslant y<x^2+1$ 时，$[y-x^2]=0$；当 $x^2+1\leqslant y<x^2+2$ 时，$[y-x^2]=1$；当 $x^2+2\leqslant y<x^2+3$ 时，$[y-x^2]=2$；当 $x^2+3\leqslant y<4$ 时，$[y-x^2]=3$.

又抛物线 $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点依次为 $(1,4)$，$(\sqrt{2},4)$，$(\sqrt{3},4)$ 及 $(2,4)$，与 Oy 轴对称的位置还有四个交点.

从而，问题可获解.

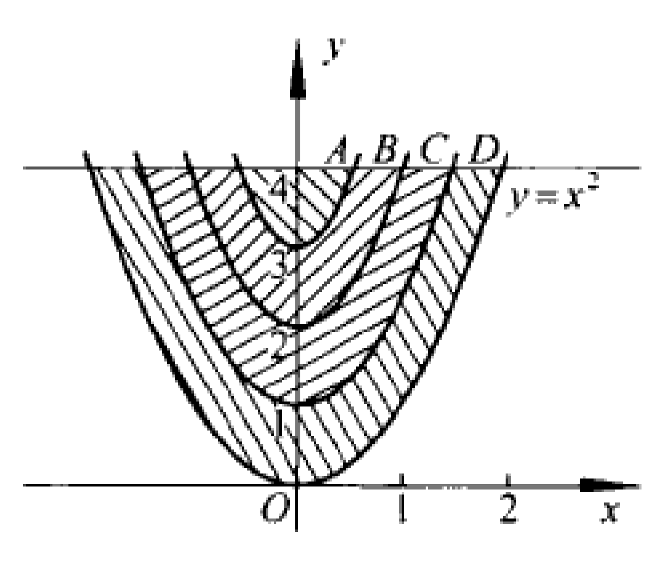


图 8.32

解　如图 8.32 所示.

当 $x^2\leqslant y<x^2+1$ 时，$[y-x^2]=0$；当 $1+x^2\leqslant y<x^2+2$ 时，$[y-x^2]=1$；当 $2+x^2\leqslant y<x^2+3$ 时，$[y-x^2]=2$；当 $3+x^2\leqslant y<4$ 时，$[y-x^2]=3$.

抛物线 $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点为 $A(1,4)$，$B(\sqrt{2},4)$，$C(\sqrt{3},4)$ 及 $D(2,4)$，与 Oy 轴对称的位置还有四个交点. 于是，

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_{0}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{x^2+2}\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{4}\mathrm{d}y\right]+2\sqrt{2}\left[\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{x^2+3}\mathrm{d}y+\int_{1}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{4}\mathrm{d}y\right]+2\sqrt{3}\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+3}^{4}\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\mathrm{d}x\right]+2\sqrt{2}\left[1+\int_{1}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x\right]+2\sqrt{3}\int_{0}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

【3977】　设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证明思路 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，并注意 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 均为以 2π 为周期的周期函数，即可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right].$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{m+n}]\cos^m t\sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

从而，命题易获证.

证 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}} r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right]. \quad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=(-1)^m(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\ \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m(-1)^n=-1$，因而，(1)式为零. 当 m 和 n 均为奇数时，$(-1)^m(-1)^n=1$，因而，(1)式等于 $\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$. 但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数，故积分仍然为零.

总之，当 m 和 n 中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

【3978】 求
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

提示 利用积分中值定理及函数 $f(x,y)$ 的连续性.

解 利用积分中值定理，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\rho^2 f(\xi,\eta),$$

其中点 (ξ,η) 为圆域 $x^2+y^2\leqslant\rho^2$ 内的一点. 显然，当 $\rho\to 0$ 时，点 $(\xi,\eta)\to O(0,0)$. 于是，根据函数 $f(x,y)$ 的连续性知，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0).$$

【3979】 设 $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $F'(t)$.

解 令 $x=ut, y=vt$，则
$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} t^2\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (1)$$

于是，似乎应该有

$$F'(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} 2t\,\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{t}\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} t^2\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{t}F(t) \quad (t>0).$$

但这是错误的.实际上本题有问题,因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分.当 $t>0$ 时,在 $x>0,y=0$ 上(即 $u>0,v=0$ 上)被积函数成为无穷,而且这个广义二重积分是发散的.这是因为,根据被积函数的非负性,有(参看本书§9)

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\int_0^1 dv\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}\,du=\int_0^1 v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)dv. \tag{2}$$

对此积分,$v=0$ 是瑕点,由于被积函数 $v^2(e^{\frac{1}{v^2}}-1)$ 在 $0\leqslant v\leqslant 1$ 上非负,且(令 $\frac{1}{v^2}=t$)

$$\lim_{v\to+0} v^2\left[v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t-1}{t^2}=+\infty,$$

故瑕积分 $\int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}}-1)dv$ 发散,且 $\int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}}-1)dv=+\infty$.由此,再根据(1)式与(2)式,得

$$F(t)\equiv+\infty \qquad (\text{当 } t>0 \text{ 时}).$$

因此,提出求 $F'(t)$ 的问题是无意义的.

注意,若本题换为:设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy,$$

求 $F'(t)$.这时得(作代换 $x=ut,y=vt$)

$$F(t)=t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\,du\,dv,$$

从而,右端积分是收敛的,(实际上可视为常义积分).于是,

$$F'(t)=2t\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\frac{2}{t}F(t) \quad (t>0).$$

【3980】 设 $F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$,求 $F'(t)$.

解 作变量代换 $x=u+t,y=v+t$ (t 固定),则

$$F(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}\,du\,dv. \tag{1}$$

今在积分号下求导数*),得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}\,du\,dv=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \quad (-\infty<t<+\infty).$$

*) 积分号下求导数的合理性,证明如下:令

$$f(u,v,t)=\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2},$$

则

$$f'_t(u,v,t)=\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}} \quad ((u,v)\neq(-t,-t)).$$

当 $(u,v)=(-t,-t)$ 时,易知 $f'_t(u,v,t)$ 不存在,但右导数存在且等于 $\sqrt{2}$,左导数也存在且等于 $-\sqrt{2}$.由于对任何数 a,b,有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,故 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,从而,$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$.于是,

$$|f'_t(u,v,t)|\leqslant\sqrt{2} \quad ((u,v)\neq(-t,-t)). \tag{2}$$

如果 $|t|>\frac{1}{\sqrt{2}}$,这时 $f(u,v,t),f'_t(u,v,t)$ (t 固定)都是区域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上的连续函数,当然可在积分号下求导数,得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\,du\,dv. \tag{3}$$

但如果 $|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$,则(3)式右端积分的被积函数 $f'_t(u,v,t)$ 在积分域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 中的点 $(u,v)=(-t,-t)$ 不

连续. 因此，不能立即断定(3)式的正确性. 下面不论 t 为何值($-\infty<t<+\infty$)，直接证明(3)式成立. 令

$$g(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (-\infty<t<+\infty). \tag{4}$$

由(2)式知 $f'_t(u,v,t)$ 是有界的，且在区域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上至多有一个不连续点(t 固定)，故(4)式右端的积分存在. 实际上，利用(2)式以及 $f'_t(u,v,t)$ 当 $(u,v)\neq(-t,-t)$ 时的连续性，用(必要时，即 $|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时)挖掉以点$(-t,-t)$为中心的小圆域的方法，不难证明 $g(t)$ 是 $-\infty<t<+\infty$ 上的连续函数(详细证明留给读者). 令

$$G(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s \quad (-\infty<t<+\infty),$$

则

$$G'(t)=g(t) \quad (-\infty<t<+\infty). \tag{5}$$

但

$$G(t)=\int_0^t \mathrm{d}s\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,s)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant t}} f'_t(u,v,s)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}s=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\int_0^t f'_t(u,v,s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

注意，(6)式中的运算是合理的，因为三维区域 $u^2+v^2\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant t$($t$ 固定)中，三元函数 $f'_t(u,v,s)$ 有界且只在直线 $u=v=-s$ 的一段上不连续，从而，(6)式中的三重积分及两个累次积分都存在，故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)\mathrm{d}s=f(u,v,t)-f(u,v,0). \tag{7}$$

事实上，若$(u,v)\neq(-t_1,-t_1)$($t_1\in[0,t]$)，则 $f'_t(u,v,t)$ 是$0\leqslant s\leqslant t$上的连续函数(u,v 固定)，从而，(7)式成立；若$(u,v)=(-t_1,-t_1)$(t_1 是属于$[0,t]$的某数)，则由 $f(u,v,s)$ 对任何 u,v,s 的连续性，有

$$\begin{aligned}\int_0^t f'_t(u,v,s)\mathrm{d}s&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{t_1-\varepsilon} f'_t(u,v,s)\mathrm{d}s+\lim_{\varepsilon'\to0}\int_{t_1+\varepsilon'}^t f'_t(u,v,s)\mathrm{d}s\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}[f(u,v,t_1-\varepsilon)-f(u,v,0)]+\lim_{\varepsilon'\to0}[f(u,v,t)-f(u,v,t_1+\varepsilon')]\\&=f(u,v,t_1)-f(u,v,0)+f(u,v,t)-f(u,v,t_1)\\&=f(u,v,t)-f(u,v,0),\end{aligned}$$

故(7)式恒成立. 代入(6)式，得 $G(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}[f(u,v,t)-f(u,v,0)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=F(t)-F(0) \quad (-\infty<t<+\infty)$.

由此，再注意到(5)式，即知 $F'(t)$ 存在，且

$$F'(t)=G'(t)=g(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (-\infty<t<+\infty),$$

即(3)式成立.

【3981】 设 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (t>0)$，求 $F'(t)$.

解题思路 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则积分域 $x^2+y^2\leqslant t^2$ 变为

$$\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant t, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\} \quad 且 \quad F(t)=\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi,$$

利用 2302 题的结果即易获解.

解 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则

$$F(t)=\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi,$$

故得

$$F'(t)=\int_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)t\mathrm{d}\varphi.$$

注意，此题中应假定 $f(x,y)$ 是连续函数.

【3982】 证明：若 $f(x,y)$ 连续，则函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$$

满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

证明思路 利用含参变量的常义积分求导数的公式，可得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$
及
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi+f(x,y).$$
同法可求得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)-f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$
及
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi.$$
于是，命题易获证.

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式，得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)-(-1)f(\xi,\xi-x+y)]d\xi+\frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x}f(x,\eta)d\eta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi+\frac{1}{2}[f(x,x+y-x)+f(x,x-x+y)]$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi+f(x,y).$$
同理，有
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)-f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi.$$
于是，得$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$，证毕.

注意 显然本题还应假定 $f'_y(x,y)$ 存在且连续.

【3983】 设函数 $f(x,y)$ 的等值线是简单封闭曲线，区域 $S(v_1,v_2)$ 由曲线 $f(x,y)=v_1$ 及 $f(x,y)=v_2$ 围成. 证明：
$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)dxdy=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)dv,$$
其中 $F(v)$ 为曲线 $f(x,y)=v_1$ 与 $f(x,y)=v_2$ 所包围的面积.

提示 用函数的无限接近的等值线把积分域 $S(v_1,v_2)$ 分为许多子域，并利用积分中值定理及微分中值定理，即可获证.

证 作$[v_1,v_2]$的任一分划 T：$v_1=v'_0<v'_1<\cdots<v'_i<\cdots<v'_n=v_2$. 令 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta v_i$，这里 $\Delta v_i=v'_i-v'_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 于是，由积分中值定理(这里假定了 $f(x,y)$ 在$S(v_1,v_2)$上连续)知，
$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{S(v'_{i-1},v'_i)}f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta S_i,$$
其中 ΔS_i 表小环形域 $S(v'_{i-1},v'_i)$（如图 8.33 阴影部分所示）的面积，$\bar{P}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in S(v'_{i-1},v'_i)$.

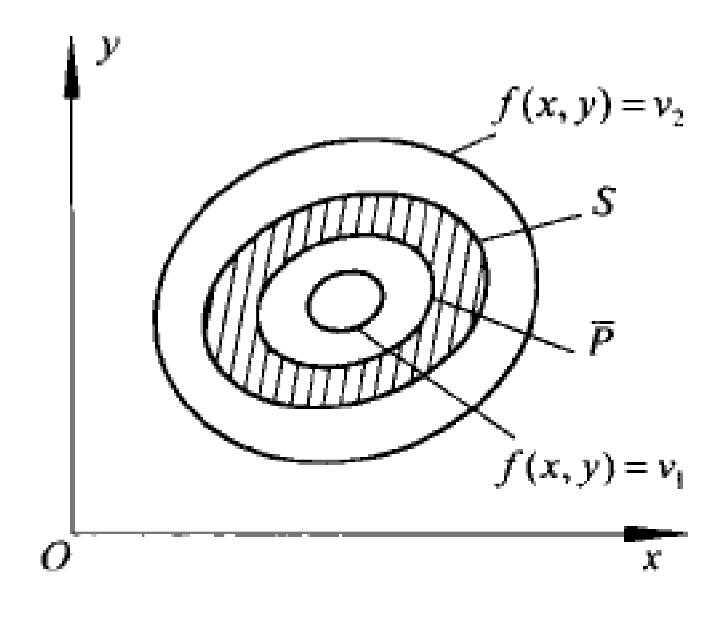


图 8.33

令 $v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$，则 $v'_{i-1}\leqslant v_i^*\leqslant v'_i$. 又显然(利用微分中值定理)有
$$\Delta S_i=F(v'_i)-F(v'_{i-1})=F'(\bar{v}_i)(v'_i-v'_{i-1})=F'(\bar{v}_i)\Delta v_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
其中 $v'_{i-1}\leqslant\bar{v}_i\leqslant v'_i$. 这里我们假定了 $F'(v)$在$[v_1,v_2]$上存在且可积，于是它有界，即

$$|F'(v)| \leqslant M = \text{常数} \quad (v_1 \leqslant v \leqslant v_2). \tag{1}$$

我们有
$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} v_i^* F'(\bar{v}_i)\Delta v_i = I_1 + I_2, \tag{2}$$

其中
$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n} (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i)\Delta v_i.$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上可积，故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1, v_2]$ 上可积. 因此，
$$\lim_{d(T)\to 0} I_1 = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\Delta v_i = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,\mathrm{d}v. \tag{3}$$

另一方面，由(1)式知
$$|I_2| \leqslant M\mathrm{d}(T) \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = M(v_2 - v_1)\mathrm{d}(T),$$

故
$$\lim_{d(T)\to 0} I_2 = 0. \tag{4}$$

现在(2)式两端令 $\mathrm{d}(T)\to 0$ 取极限(注意(2)式左端是常数)，并注意到(3)式与(4)式，即得
$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,\mathrm{d}v.$$

证毕.

应当指出，正如上面所说的，本题应假定 $f(x,y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续，而 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在并且可积.

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上区域 S 的面积由以下公式给出： $S = \iint\limits_{S} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

求下列曲线所界的面积：

【3984】 $xy = a^2, x + y = \dfrac{5a}{2} \quad (a > 0).$

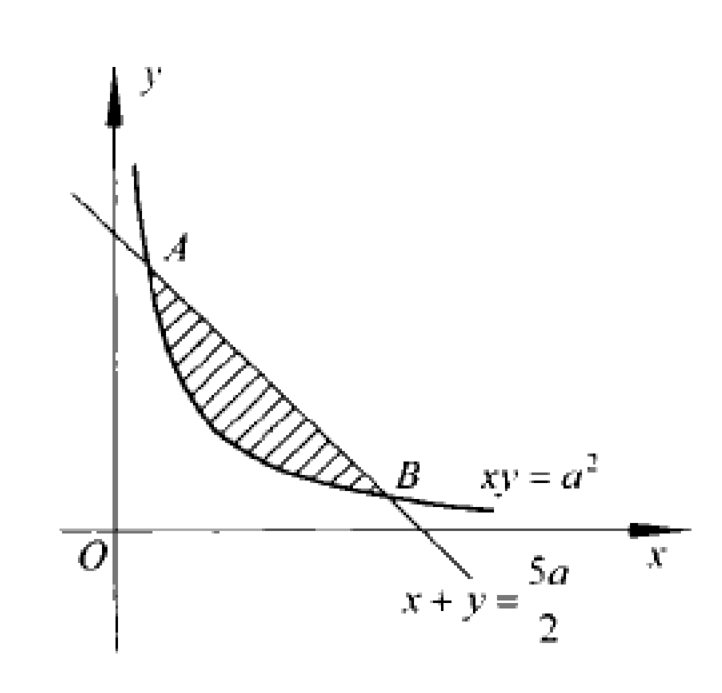


图 8.34

解 两曲线的交点为 $A(\dfrac{a}{2}, 2a)$ 和 $B(2a, \dfrac{a}{2})$(图 8.34)，故所求面积为
$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \mathrm{d}x \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x} \mathrm{d}y = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2\ln 2.$$

【3985】 $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0).$

解 曲线的交点为 $A(\dfrac{q-p}{2}, \sqrt{pq})$ 和 $B(\dfrac{q-p}{2}, -\sqrt{pq})$(图 8.35)，

故所求面积为 $S = 2\int_0^{\sqrt{pq}} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$

图 8.35

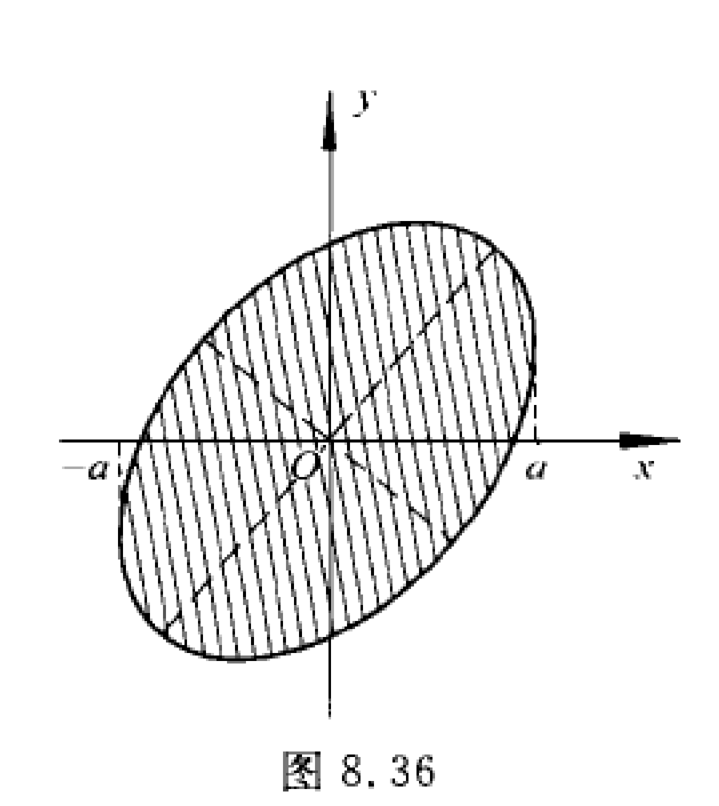


图 8.36

【3986】 $(x-y)^2+x^2=a^2\quad(a>0)$.

解 如图 8.36 所示. 所求面积的区域为：

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi a^2.$$

变换为极坐标，计算下列曲线所围的面积：

【3987】 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$； $x^2+y^2\geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为 $r^2=2a^2\cos2\varphi$；$r\geqslant a$.

它们的交点在第一象限内为$\left(a,\frac{\pi}{6}\right)$，如图 8.37 所示. 利用对称性，得所求面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos2\varphi}}r\,\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos2\varphi-a^2)\mathrm{d}\varphi=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

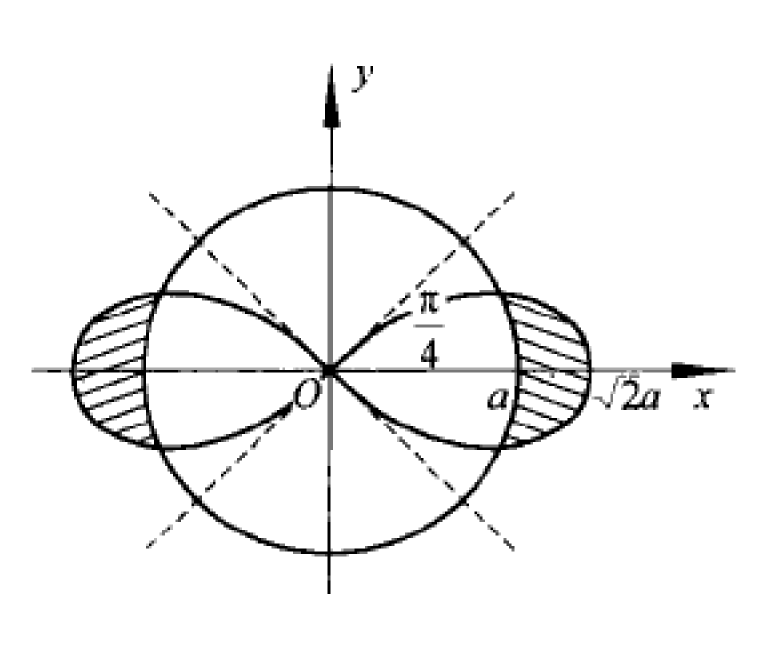


图 8.37

【3988】 $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$；$x\geqslant0,y\geqslant0$.

解 将方程化为极坐标方程，得 $(r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta)^2=r^2$，

即
$$r^2=\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

曲线所围的面积为
$$S=\iint\limits_S r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta},$$

由于
$$\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\tan\frac{3\pi}{8}-\ln\tan\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^{*)}}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2}}=2\arctan(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

于是，所求的面积为 $S=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{6}.$

*） 利用 2053 题的结果，其中 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{3}{2}$，$A=2$，$B=0$.

【3989】 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\quad(a>0)$.

解 显然曲线关于 Ox 轴对称，故只要求出 $y\geqslant0$ 的部分. 化为极坐标，方程为

$$r=a\cos\theta(4\cos^2\theta-3).$$

由于必须 $x^3-3xy\geqslant0$，故 $\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\geqslant0$. 因此，$\cos\theta\geqslant0$ 且 $\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta\leqslant0$ 且 $\cos\theta\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}$，$-\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2}$. 于是，在 Ox 轴的上方部分（$y\geqslant0$）为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\quad 和\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$S=\iint_S r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} r^2\mathrm{d}\theta\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta.$$

作上式右端第二个积分中作代换 $\theta=\pi-\varphi$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta,$$

故

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left(16\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-24\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}+9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4}.$$

【3990】 $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$；$(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$ $(a>0)$.

解 将方程化为极坐标方程，得(双纽线)

$$r^4=8a^2r^2\cos\theta\sin\theta,\quad 即\quad r=2a\sqrt{\sin2\theta};$$

与圆周 $(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta-a)^2=a^2$，即 $r=a(\cos\theta+\sin\theta)\pm a\sqrt{\sin2\theta}$.

显然，两条曲线关于射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a\sqrt{\sin2\theta}=a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin2\theta},$$

解得交点的极角 $\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}$. 于是，所求的面积为

$$S=\iint_S r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{(2a\sqrt{\sin2\theta})^2-[a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin2\theta}]^2\right\}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}[2a^2\sin2\theta+2a^2(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin2\theta}-a^2]\mathrm{d}\theta.$$

注意到 $\int(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin2\theta}+\frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)+C^{*)}$. 即得

$$S=a^2[-\cos2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin2\theta}+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)-\theta]\Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=a^2\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{14}}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right]=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^{**)}.$$

*) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin2x}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}\right)\sqrt{\tan x},\quad \sqrt{\sin2x}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}\right)\sqrt{\cot x}$$

化为二项微分式的积分，参看 A. Ф. Тимофеев《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ》第五章 § 15.

**) 容易证明：$\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}$. 事实上，我们有

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=\frac{3\sqrt{14}}{32}+\frac{5\sqrt{14}}{32}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据以下公式引入广义极坐标 r 和 φ：

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\qquad y=br\sin^\alpha\varphi\quad(r\geqslant0),$$

其中 a，b 和 α 为以适当的方法选出的常数，且考虑到 $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$，求由下列曲线所围的面积(假定参数是正的)：

【3991】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

解 不失一般性，设 $k>0, h>0$. 令 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$r=\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi.$$

由于 $r\geqslant 0$，故有

$$\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\geqslant 0,$$

因此，首先必须 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 同时，应有 $\cos\varphi\geqslant 0$ 且 $\tan\varphi\geqslant-\frac{ak}{bh}$ 或者 $\cos\varphi<0$ 且 $\tan\varphi\leqslant-\frac{ak}{bh}$.

从而，极角 φ 应满足不等式 $-\arctan\frac{ak}{bh}\leqslant\varphi\leqslant\pi-\arctan\frac{ak}{bh}$. 于是，曲线所围的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\int_{-\arctan\frac{ak}{bh}}^{\pi-\arctan\frac{ak}{bh}}\left(\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\arctan\frac{ak}{bh}}^{\pi-\arctan\frac{ak}{bh}}\sin^2(\varphi+\alpha_0)\mathrm{d}\varphi,$$

其中 $\alpha_0=\arctan\frac{ak}{bh}$. 从而，我们有

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left[\frac{\varphi+\alpha_0}{2}-\frac{1}{4}\sin2(\varphi+\alpha_0)\right]\Bigg|_{-\arctan\frac{ak}{bh}}^{\pi-\arctan\frac{ak}{bh}}=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

【3992】 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$； $x=0$，$y=0$.

解 令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$r=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

于是，曲线所围的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi+2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi.$$

根据 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126 知：

$$\int\frac{\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{1}{(1+\tan^3\varphi)}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\tan\varphi}{3(1+\tan^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}+\sqrt{3}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

从而，

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left\{\frac{\tan\varphi}{3(1+\tan^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}+\sqrt{3}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4;$$

又

$$\int\frac{\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\tan^4\varphi}{(1+\tan^3\varphi)^2}\mathrm{d}(\tan\varphi)=\frac{\tan^5\varphi}{3(1+\tan^3\varphi)}-\frac{2}{3}\int\frac{\tan^4\varphi}{1+\tan^3\varphi}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\tan^5\varphi}{3(1+\tan^3\varphi)}-\frac{2}{3}\left\{\frac{\tan^2\varphi}{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}+C,$$

从而，

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\left\{\frac{\tan^5\varphi}{3(1+\tan^3\varphi)}-\frac{\tan^2\varphi}{3}-\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外，还有

$$\int \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int \frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan^3\varphi)^2}d(\tan\varphi)=-\frac{1}{3(1+\tan^3\varphi)}+C,$$

从而，

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi=ab\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\tan^3\varphi)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是，曲线所围的面积为

$$S=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4+\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2=\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right].$$

【3993】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\quad(x>0,y>0).$

解 解法 1：

令 $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所围的面积为 $S=\iint\limits_S abr\,drd\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi.$

注意到

$$\int\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^4}d(\tan\varphi)=-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}+C,$$

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan\varphi)^4}d(\tan\varphi)=\int\frac{(\tan\varphi-1)(\tan\varphi+1)+1}{(1+\tan\varphi)^4}d(\tan\varphi)$$

$$=\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}d(\tan\varphi)-2\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}d(\tan\varphi)+\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^4}d(\tan\varphi)$$

$$=-\frac{1}{1+\tan\varphi}+\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}-\frac{1}{3}\ \frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}+C,$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}+\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\tan\varphi}+\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

解法 2：

令 $x=hr\cos\varphi,\ y=kr\sin\varphi$，则方程化为

$$r^2=\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\cos\varphi+\frac{k}{b}\sin\varphi\right)^4}=\left[\frac{a^2b^2}{(hb)^2+(ka)^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4(\varphi+\alpha)}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\tan\alpha=\frac{hb}{ka}$. 于是，曲线所围的面积为

$$S=\iint\limits_S hkr\,drd\varphi=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[-\frac{1}{6}\ \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}-\frac{1}{3}\ \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)+\frac{1}{3}(\tan\alpha+\cot\alpha)\right]$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\cdot\frac{1}{6}\ \frac{[(hb)^2+(ka)^2]^3}{(hbka)^3}=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*） 利用 2012 题的结果.

* *） 由 $\tan\alpha=\frac{hb}{ka}$ 知：$\cot\alpha=\frac{ka}{hb}$， $\sin\alpha=\frac{hb}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}}$， $\cos\alpha=\frac{ka}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}}$.

【3994】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\quad(x>0,y>0)$.

解 令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}.$$

由于 $$\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi\geqslant0,\quad \left(\frac{ak}{bh}\right)^2\geqslant\tan^2\varphi,$$

注意到 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，可知极角的变化区间为 $0\leqslant\varphi\leqslant\arctan\frac{ak}{bh}$.

于是，注意利用上题中两个不定积分的结果，即得曲线所围的面积为

$$S=\iint\limits_S abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}r^2\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{3\tan^2\varphi+3\tan\varphi+1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[\frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}+1\right]+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2+3\left(\frac{ak}{bh}\right)+1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}-1\right]$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{(ak)^3+3(ak)^2bh+3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3}+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\frac{-(ak)^3}{(ak+bh)^3}$$

$$=\frac{a^4bk}{6h^2(ak+bh)^3}(a^2k^2+3akbh+2b^2h^2)=\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.$$

【3995】 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$；$x=0$，$y=0$.

提示 作变换 $x=ar\cos^8\varphi$，$y=br\sin^8\varphi$，则方程化为 $r=1\ (0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$.

解 令 $x=ar\cos^8\varphi$，$y=br\sin^8\varphi$，则方程化为

$$r=1\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

于是，曲线所围的面积为

$$S=\iint\limits_S 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^1u^7(1-u^2)^3\mathrm{d}u$$

$$=4ab\int^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})\mathrm{d}u=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换，求下列曲线所围的面积：

【3996】 $x+y=a$，$x+y=b$，$y=\alpha x$，$y=\beta x\ (0<a<b;0<\alpha<\beta)$.

提示 作变换 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，则 $a\leqslant u\leqslant b,\alpha\leqslant v\leqslant\beta$，且有 $|I|=\frac{u}{(1+v)^2}$.

解 作变换 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，则 $a\leqslant u\leqslant b,\alpha\leqslant v\leqslant\beta$，且有 $|I|=\frac{u}{(1+v)^2}$.

于是，所求的面积为 $$S=\int_a^b u\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

【3997】 $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x\quad(x>0;y>0)$.

提示 作变换 $xy=u$，$\frac{y}{x}=v$，则 $a^2\leqslant u\leqslant2a^2$，$1\leqslant v\leqslant2$，且有 $|I|=\frac{1}{2v}$.

解 作变换 $xy=u$，$\frac{y}{x}=v$，则 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2$，$1\leqslant v\leqslant 2$，且有 $|I|=\frac{1}{2v}$.

于是，所求的面积为 $$S=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}u\int_1^2\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

【3998】 $y^2=2px$，$y^2=2qx$，$x^2=2ry$，$x^2=2sy$（$0<p<q$；$0<r<s$）.

提示 作变换 $\frac{y^2}{x}=u$，$\frac{x^2}{y}=v$，则 $2p\leqslant u\leqslant 2q$，$2r\leqslant v\leqslant 2s$，且有 $|I|=\frac{1}{3}$.

解 作变换 $\frac{y^2}{x}=u$，$\frac{x^2}{y}=v$，则 $2p\leqslant u\leqslant 2q$，$2r\leqslant v\leqslant 2s$，且有 $|I|=\frac{1}{3}$.

于是，所求的面积为 $$S=\frac{1}{3}\int_{2p}^{2q}\mathrm{d}u\int_{2r}^{2s}\mathrm{d}v=\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

【3999】 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$，$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，$\frac{4x}{a}=\frac{y}{b}$（$a>0$，$b>0$）.

提示 作变换 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$，$\frac{x}{y}=v$，即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2$，$\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$，且有 $$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

解 作变换 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$，$\frac{x}{y}=v$，即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2$，$\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$，且有

$$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_1^2 2u^3\mathrm{d}u\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}=\frac{15}{2}\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}{}^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^4}\right]\mathrm{d}t=15a\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*）作代换 $v=at^2$.

【4000】 $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$，其中 λ 取下列各值：

$$\frac{1}{3}c^2,\quad\frac{2}{3}c^2,\quad\frac{4}{3}c^2,\quad\frac{5}{3}c^2\quad(x>0,y>0).$$

解 方程 $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$ 可变为 $\lambda^2-(x^2+y^2+c^2)\lambda+c^2x^2=0$.

将 λ 作为未知量解方程，不妨记方程的两个解为 λ 及 μ，则

$$\lambda=\frac{x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},\quad\mu=\frac{x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换，将(x,y)变为(λ,μ). 易知

$$\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|=\frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}=\frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}{\lambda-\mu},$$

从而，
$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=\frac{1}{\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}}=\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{\frac{4c^2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5c^2}{3}\\ \frac{c^2}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{2c^2}{3}}}\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{u-v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u-1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v(1-v)}}-\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-1)}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v}}.$$

由于
$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\qquad\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-1)}}=2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v(1-v)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},\qquad\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}}\mathrm{d}v=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$S=\frac{c^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]-\frac{c^2}{4}\left[\left(2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$
$$=\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}.$$

【4001】 求椭圆$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$（其中$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0$）的面积.

提示 作变换$a_1x+b_1y+c_1=u$，$a_2x+b_2y+c_2=v$，则椭圆所围区域变为$u^2+v^2\leqslant1$，且有$|I|=\dfrac{1}{|\delta|}$.

解 作变换$a_1x+b_1y+c_1=u$，$a_2x+b_2y+c_2=v$，则椭圆所围区域变为$u^2+v^2\leqslant1$，且有$|I|=\dfrac{1}{|\delta|}$.

于是，所求的面积为
$$S=\frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

【4002】 求椭圆
$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2u}=c^2\quad(u=u_1,u_2)$$

和双曲线
$$\frac{x^2}{\cos^2v}-\frac{y^2}{\sin^2v}=c^2\qquad(v=v_1,v_2)\quad(0<u_1<u_2;0<v_1<v_2;x>0,y>0)$$

所围的面积.

提示 作变换$x=c\,\mathrm{ch}u\cos v$，$y=c\,\mathrm{sh}u\sin v$，则有$|I|=|c^2\mathrm{ch}^2u-c^2\cos^2v|$.

解 作变换$x=c\,\mathrm{ch}u\cos v$，$y=c\,\mathrm{sh}u\sin v$，则有$|I|=|c^2\mathrm{ch}^2u-c^2\cos^2v|$.

因为$\mathrm{ch}^2u\geqslant1\geqslant\cos^2v$，故所求的面积为

$$S=c^2\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}(\mathrm{ch}^2u-\cos^2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=c^2\left[(v_2-v_1)\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\mathrm{ch}2u}{2}\mathrm{d}u-(u_2-u_1)\int_{v_1}^{v_2}\cos^2v\mathrm{d}v\right]$$
$$=\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\mathrm{sh}2u_2-\mathrm{sh}2u_1)-(u_2-u_1)(\sin2v_2-\sin2v_1)].$$

【4003】 求平面$x+y+z=b$与曲面$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程，作变量代换

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z,\quad y'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z,\quad z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换，故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系. 在新的坐标系下，平面方程为

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)=\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',\quad y=\frac{-\sqrt{6}}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',\quad z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$

故有 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=\frac{3}{2}(x'^2+y'^2).$

从而，曲面方程变为 $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}a^2$. 于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{x'^2+y'^2\leqslant\frac{2}{3}a^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

【4004】 求平面 $z=1-2(x+y)$ 与曲面 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ 相截所得截断面之面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S，它在 Oxy 平面上的投影记为 D. 由于平面 $z=1-2(x+y)$ 的法线之方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{1}{3}$，故 $D=S\cos\gamma=\frac{1}{3}S$，从而，$S=3D$，显然 D 为 Oxy 平面上由曲线 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{1-2(x+y)}=0$（也即 $2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$）所围的区域. 作变量代换

$$x=u+v+\frac{1}{7},\qquad y=u-v+\frac{1}{7}.$$

于是，$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$，且曲线 $2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$ 变为 $7u^2+v^2-\frac{1}{7}=0$，这是一个椭圆（在 uv 平面上）. 从而，即得

$$D=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{49u^2+7v^2\leqslant1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\pi\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=\frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此，最后得
$$S=3D=\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§3. 体积的计算法

如图 8.38 所示，设柱体顶面位于连续曲面 $z=f(x,y)$，底面位于平面 $z=0$，侧面垂直于底面，且底面在平面 Oxy 上所占区域 Ω 是可求积的，则. 柱体的体积等于

$$V=\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

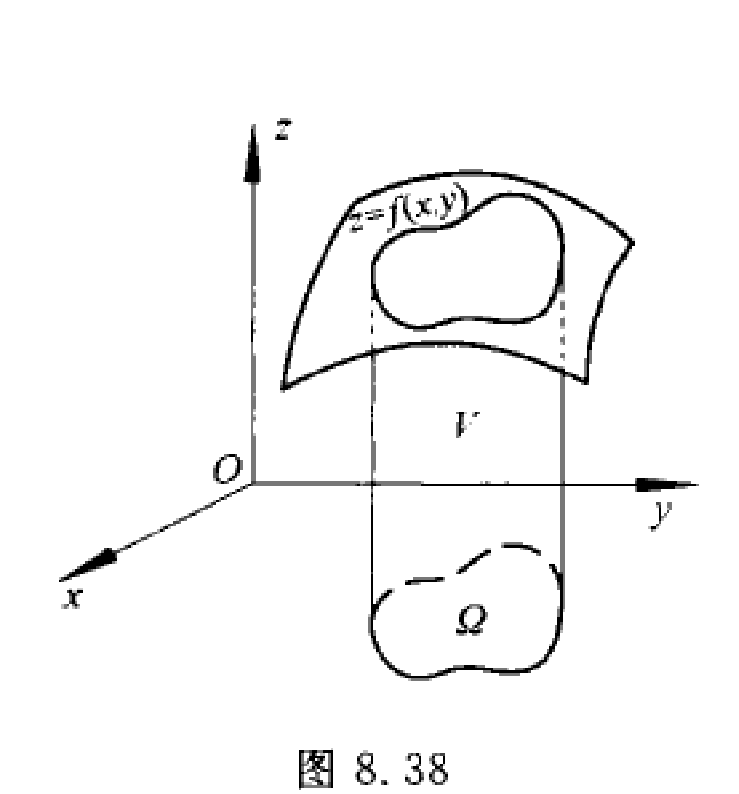


图 8.38

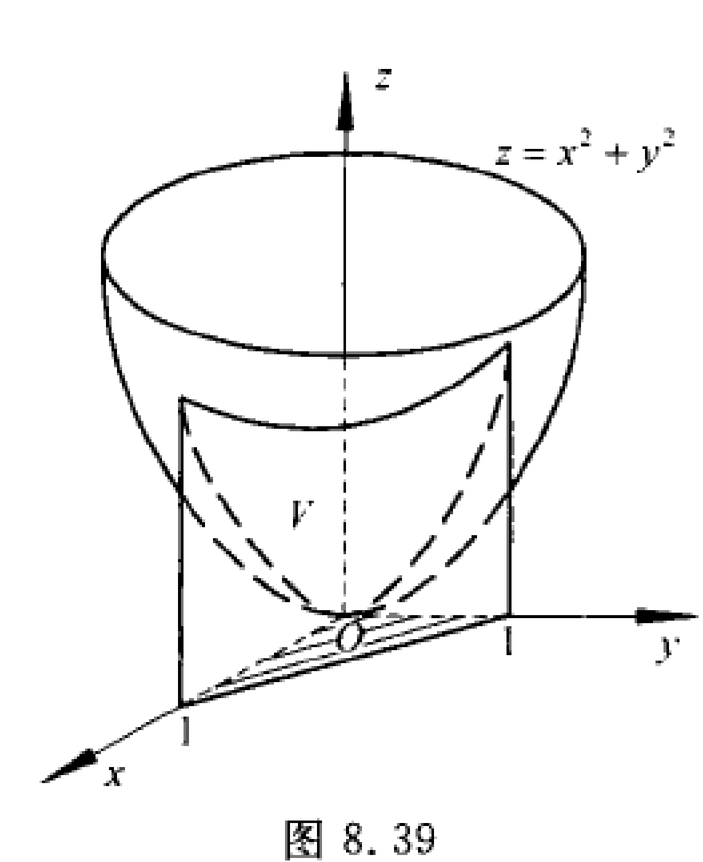


图 8.39

【4005】 试绘出一物体，其体积等于积分

$$V=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

解 积分域为三角形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$.
柱体上顶为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$. 物体的形状如图 8.39 所示.

【4006】 绘出下列二重积分所表示的体积：

(1) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (2) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (3) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (5) $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (6) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 积分域为三角形 $0\leqslant x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 柱体的上顶为平面 $z=x+y$ (图 8.40).

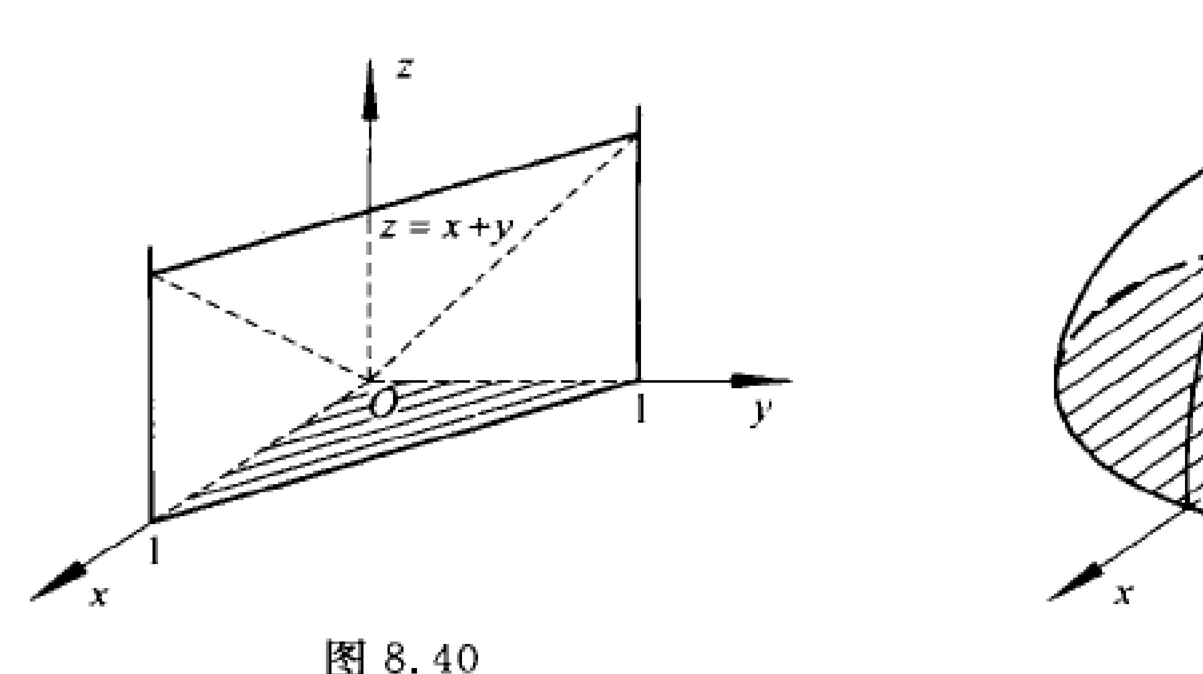


图 8.40

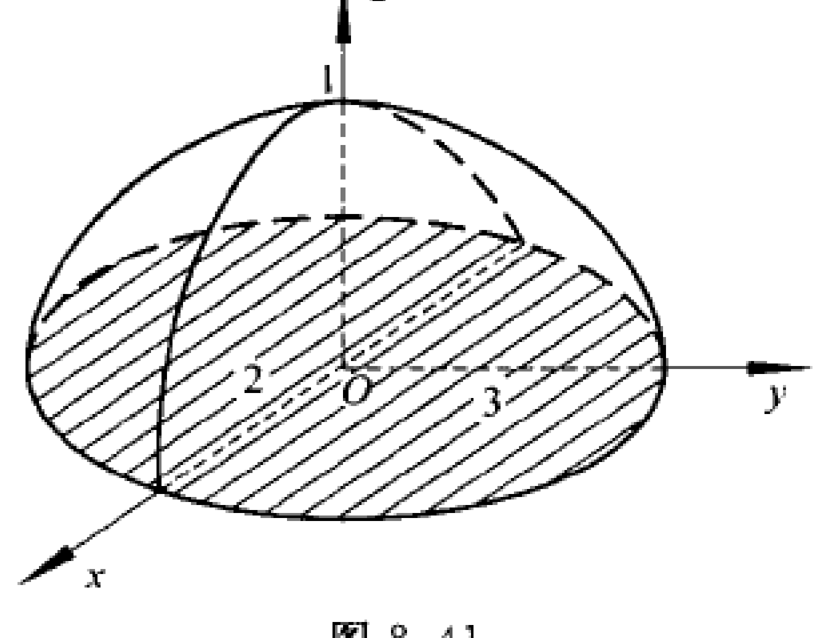


图 8.41

(2) 积分域为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1$，即立体的底面，顶面为椭球面 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$ (图 8.41).

(3) 积分域为由直线 $x+y=1, x+y=-1, x-y=1, y-x=1$ 围成的正方形. 柱体的顶面为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$. 图 8.42 仅画了第一卦限部分的体积.

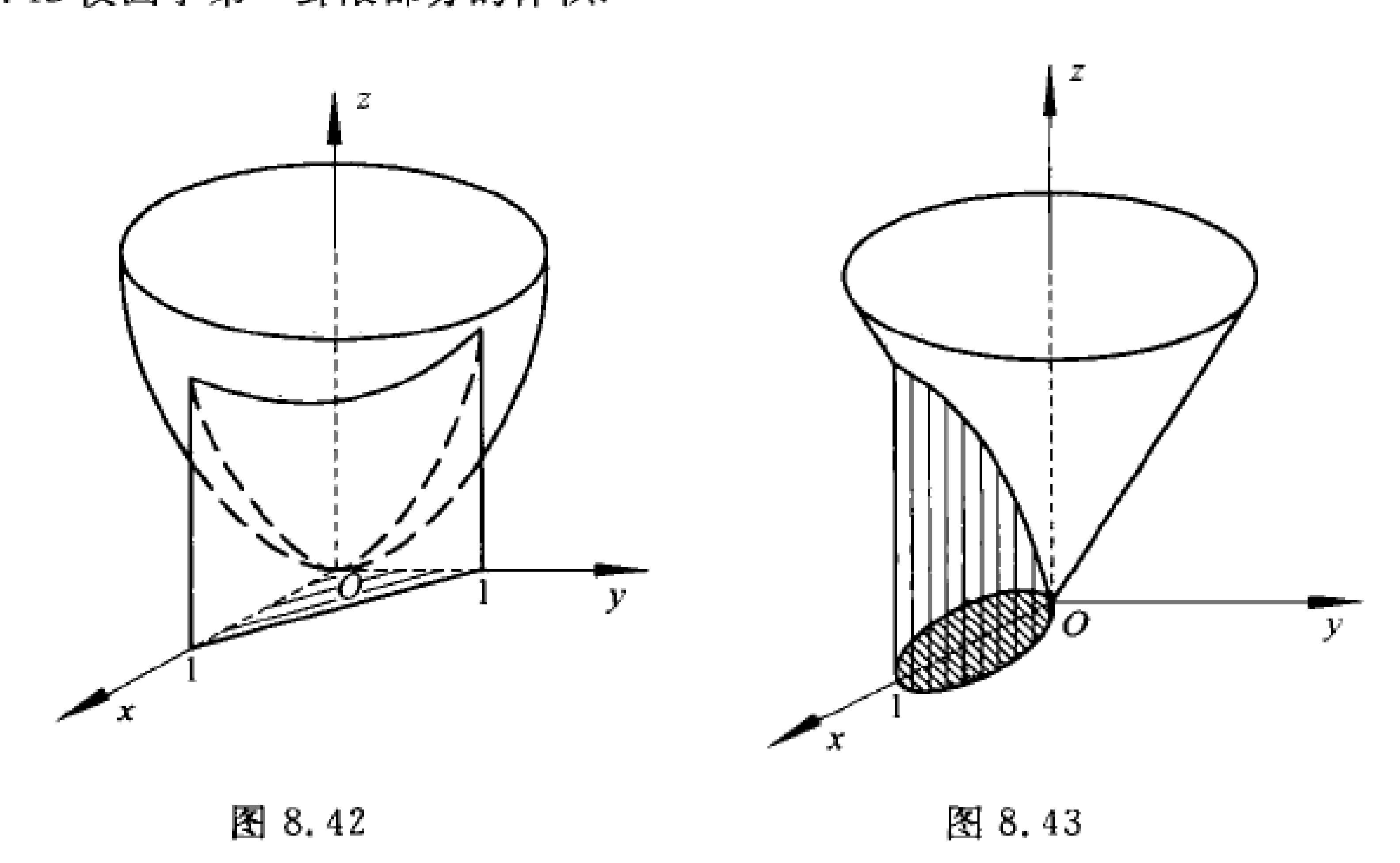


图 8.42 图 8.43

(4) 积分域为圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$. 柱体的顶面为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (图 8.43).

(5) 积分域为梯形 $1\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2x$. 柱体的顶面为双曲抛物面 $z=\sqrt{xy}$ (图 8.44).

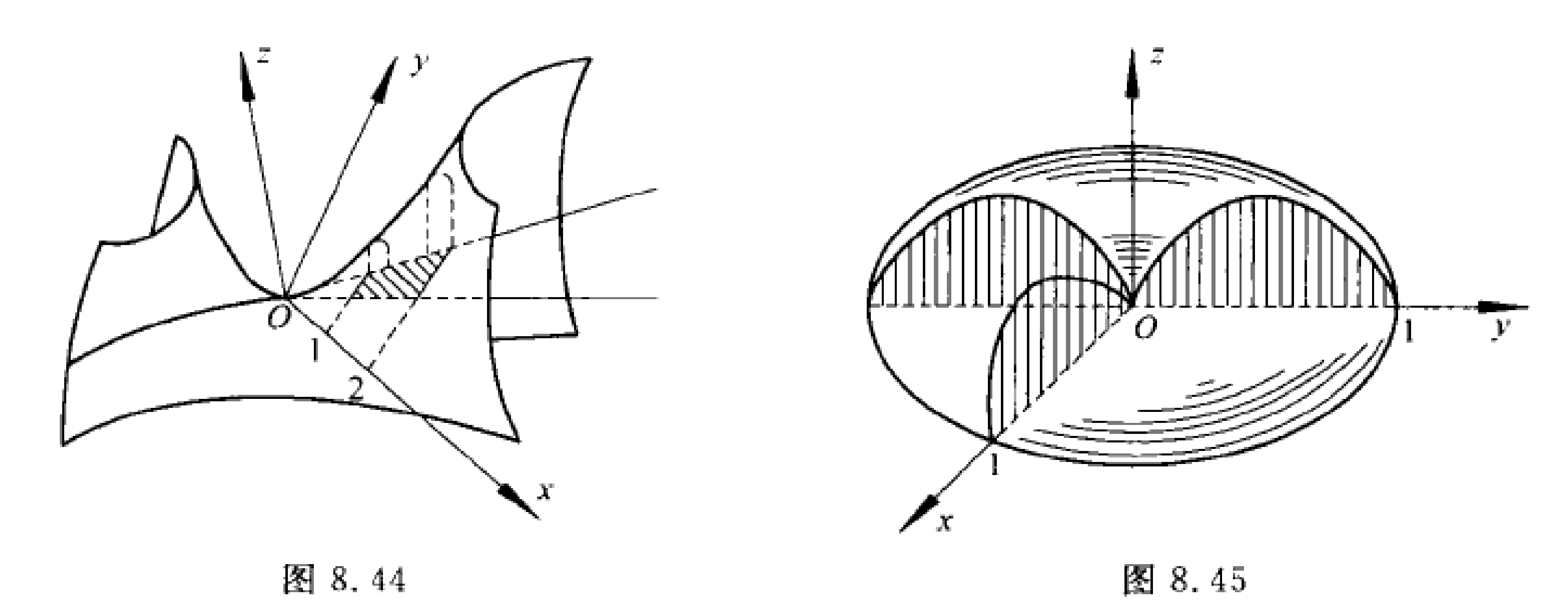


图 8.44　　　　图 8.45

(6) 积分域为圆 $x^2+y^2\leqslant 1$. 即立体的底面，顶面是由正弦曲线 $z=\sin\pi x$ 绕 Oz 轴旋转一周而得的旋转曲面(图 8.45).

求下列曲面所围区域的体积：

【4007】 $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1, x=0, y=0.$

解 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{6}.$

【4008】 $x+y+z=a,\ x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a\geqslant R\sqrt{2}).$

解 $V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-x-y)dy=\int_0^R\left[(a-x)\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right]dx$

$=\int_0^R a\sqrt{R^2-x^2}dx-\int_0^R\left(x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2-x^2}{2}\right)dx=\frac{\pi aR^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$

【4009】 $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

解 $V=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}.$

【4010】 $z=\cos x\cos y, z=0, |x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}, |x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}.$

提示 注意函数 $z=\cos x\cos y$ 的图像关于 Oyz 平面对称，而积分域关于 Oy 轴对称.

解 因函数 $z=\cos x\cos y$ 的图像关于 Oyz 平面对称，而积分域(图 8.46)关于 Oy 轴对称，故所求的体积为

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cos y dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=4\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

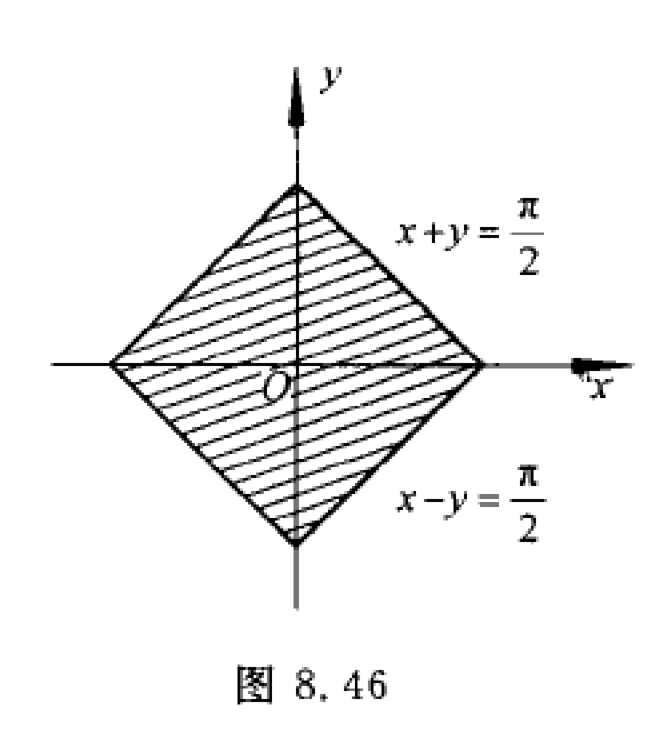


图 8.46

【4011】 $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$

解 $V=\int_0^\pi dx\int_0^x\sin\frac{\pi y}{2x}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx=\pi.$

【4012】 $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0.$

提示 注意所求的体积 V 由两部分组成：

$V_1:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{1+x},\ z=xy.$

$V_2:\ 0\leqslant x\leqslant 1, \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x,\ z=1-x-y.$

解 体积 V 由两部分组成：

$V_1:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{1+x},\ z=xy.$

$V_2:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x,\ z=1-x-y.$

它们在 Oxy 平面上的投影域 Ω_1 及 Ω_2 如图 8.47 所示．于是，所求的体积为

$$V=V_1+V_2$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

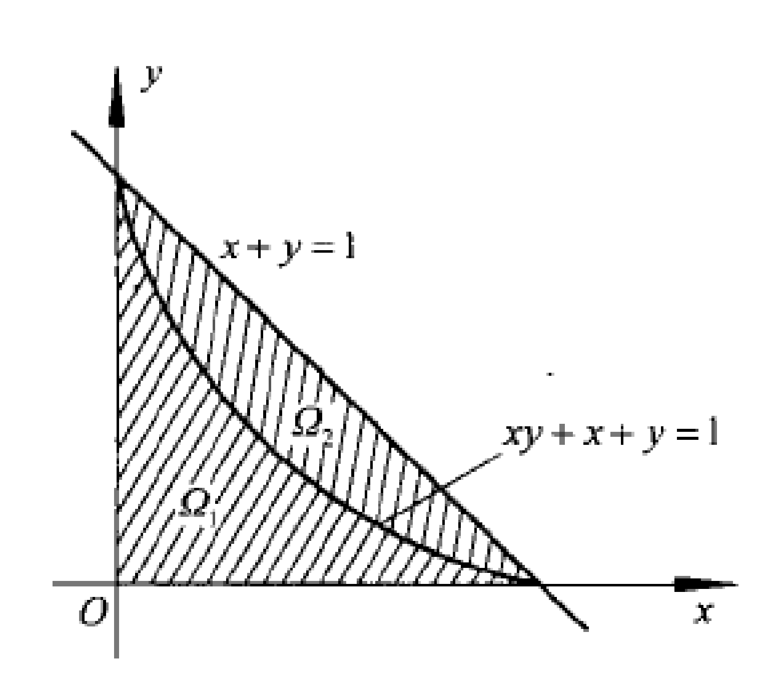


图 8.47

变换成极坐标，求下列曲面所围区域的体积：

【4013】 $z^2=xy$，$x^2+y^2=a^2$．

提示 注意对称性，令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，并利用 3856 题的结果．

解 因为 $z=\sqrt{xy}$，故所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^a \mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,r^2\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{3}a^3\ \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)^{*)}=\frac{2}{3}a^3\ \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{2}{3}a^3\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}a^3\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

*） 利用 3856 题的结果．

【4014】 $z=x+y$，$(x^2+y^2)^2=2xy, z=0(x>0,y>0)$．

提示 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，并利用 3856 题的结果．

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程 $(x^2+y^2)^2=2xy$ 及 $z=x+y$ 变为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi \quad 及 \quad z=r(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi+\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)^{*)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\ \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

*） 利用 3856 题的结果．

【4015】 $z=x^2+y^2$，$x^2+y^2=x$，$x^2+y^2=2x$，$z=0$．

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程 $x^2+y^2=x$，$x^2+y^2=2x$ 及 $z=x^2+y^2$ 变为

$$r=\cos\varphi,\quad r=2\cos\varphi \quad 及 \quad z=r^2.$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r=\frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$

【4016】 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2\geqslant a|x|\quad(a>0)$.

解 只需计算由下列曲面所围区域的体积：

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2\leqslant a|x|.$$

若引用极坐标，则 $r^2+z^2=a^2$，$r^2\leqslant a|r\cos\varphi|$，其体积为

$$V_1=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant0,y\geqslant0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

于是，所求的体积为 $$V=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

【4017】 $x^2+y^2-az=0$，$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，$z=0\ (a>0)$.

解 若引用极坐标，则有 $$z=\frac{r^2}{a},\qquad r^2=a^2\cos2\varphi\quad(a>0).$$

于是，利用对称性知，所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\frac{r^2}{a}r\mathrm{d}r=a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^3}{8}.$$

【4018】 $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$，$z=0$，$x^2+y^2=R^2$.

解 利用对称性，得所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant0,y\geqslant0}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

【4019】 $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$，$x^2+y^2=a^2$，$y=x\tan\alpha$，$y=x\tan\beta\ (a>0,c>0,0\leqslant\alpha<\beta\leqslant2\pi)$.

解 所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_0^a cr\cos\frac{\pi r}{2a}\mathrm{d}r=c(\beta-\alpha)\left[\frac{2ar}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2a}+\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi r}{2a}\right]\Big|_0^a$$

$$=2a^2c(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\right)=\frac{2a^2c(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}.$$

【4020】 $z=x^2+y^2$，$z=x+y$.

提示 注意两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影域的围线为圆

$$x^2+y^2=x+y\quad\text{或}\quad\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

故令 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\quad\text{及}\quad z=1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

解 立体的投影域的围线为 $x^2+y^2=x+y$ 或 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若引用代换 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则有

$$z=r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi),\quad z=1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2}}[(x+y)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]-\left[r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\right\}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

求下列曲面所围区域的体积(假定参数是正的):

【4021】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

提示 注意两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$,故令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则曲面方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad 及\quad z=cr\quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

解 两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. 令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad 及\quad z=cr\quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是,曲面所围区域的体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)\mathrm{d}r$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)\mathrm{d}r=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3+(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

【4022】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

提示 令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则曲面方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1+r^2}\quad (0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant1).$$

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则曲面方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1+r^2}\quad (0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant1).$$

于是,曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}2c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2abcr\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc(2\sqrt{2}-1).$$

【4023】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

提示 注意立体在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\quad 或\quad \left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

故令 $\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$, $\frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$,则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]\quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

解 立体在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$,即 $\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

若令 $\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$\frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}} c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]\mathrm{d}r$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{16}\right]\mathrm{d}\varphi=abc\,\frac{3\cdot 2\pi}{16}=\frac{3}{8}\pi abc.$$

【4024】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$，$z=0$.

提示 令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c(1-r^4)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1).$$

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c(1-r^4)\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr(1-r^4)\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi abc.$$

【4025】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

提示 计算位于第一卦限（即 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$）部分的体积. 令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right).$$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积. 令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right).$$

于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc\sin 2\varphi\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\right)=\frac{abc}{3}.$$

【4026】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1-r^2},\qquad r^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi$$

（因 $r^2=\cos 2\varphi\geqslant 0$，故 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}$）. 于是，利用对称性知，曲面所围区域的体积为

$$V=8c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{8abc}{3}\left(\varphi+\sqrt{8}\cos\varphi-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8abc}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

【4027】 $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

解 由于 $z=\pm\sqrt{xy}$,又所界立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=a$, $x+y=b$, $x=0$ 及 $y=0$ 围成.利用对称性知,曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned}V&=2\iint_\Omega\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\int_0^a\mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $x=b\sin^2t$,可得

$$\begin{aligned}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x&=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\sin^2t\mathrm{d}t\\&=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6t\mathrm{d}t\right)=2b^3\left(\frac{3\cdot1}{4\cdot2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;\end{aligned}$$

同理,有 $$\int_0^a(a-x)\sqrt{x(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是,所求的体积为 $$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

【4028】 $z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, $z=0$.

提示 注意曲面所围区域的立体在 Oxy 平面上的投影域由曲线 $xy=a^2$, $xy=2a^2$ 及直线 $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$ 围成,故令 $xy=ua^2$, $y=vx$,则积分域变为长方形域

$$1\leqslant u\leqslant2,\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2,\quad 且\ |I|=\frac{a^2}{2v},\ z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right).$$

再利用对称性.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$, $xy=2a^2$ 和直线 $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$ 围成.利用对称性知,曲面所围区域的体积为 $V=2\iint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

作变量代换 $xy=ua^2$, $y=vx$,则积分域变为长方形域 $1\leqslant u\leqslant2$, $\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2$,且 $|I|=\frac{a^2}{2v}$, $z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)$.

于是,所求的体积为

$$V=2\iint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant2\\\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2}}a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{a^2}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=a^4\int_1^2u\mathrm{d}u\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v=\frac{9}{2}a^4.$$

【4029】 $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$.

提示 仿 4028 题,令 $x=uy^2$, $y=vx^2$,则积分域 Ω 变为正方形域 $\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant1$, $\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant1$,且 $|I|=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$.

解 曲面所围区域的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$ 及 $y^2=2x$ 围成.我们有

$$V=\iint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换

$$x=uy^2,\quad y=vx^2,\quad 或\ x=u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}},\quad y=u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域 Ω 变为正方形域 $\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1$，$\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1$，且 $|I|=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$. 于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}v^{-3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}\mathrm{d}u\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

【4030】 $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$，$z=0$，$xy=a^2$，$y=\alpha x$，$y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta;x>0)$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$ 和直线 $y=\alpha x$，$y=\beta x$ $(x>0)$ 围成. 于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\iint\limits_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $x=ar\cos\varphi$，$y=ar\sin\varphi$，则 $|I|=a^2r$. 于是，

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\iint\limits_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2c\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}\sin(\pi r^2\sin\varphi\cos\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{\pi}\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2c}{\pi}\ln\tan\varphi\Big|_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}=\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

【4031】 $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成. 于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-x)+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1-\frac{4}{35}(1-x)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{4}{35}=\frac{8}{35}.$$

【4032】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$，$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$，$z=0$.

提示 令 $x=ar\cos^3\varphi$，$y=br\sin^3\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)],\ r=1\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1),$$

注意对称性，并利用 3856 题的结果.

解 令 $x=ar\cos^3\varphi$，$y=br\sin^3\varphi$，则方程化为

$$z=c[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)],\qquad r=1\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，利用对称性知，曲面所围区域的体积为

$$V=4\iint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$=12abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=6abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=6abc\left[\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{10}\cdot\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{3\pi abc}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{105}{1920}\right)=\frac{75}{256}\pi abc.$$

【4033】 $z=c\arctan\frac{y}{x}$，$z=0$，$\sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\frac{y}{x}$ $(y\geqslant 0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程化为 $z=c\varphi$，$r=a\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$，于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\varphi}c\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^3\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2c}{8}\varphi^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^4a^2c}{128}.$$

【4034】 $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(n>0)$

提示 令 $x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则曲面方程化为

$$z=c\sqrt[n]{1-r^n}\quad(0\leqslant r\leqslant 1).$$

在求体积 V 的过程中，先后令 $r^n=t$ 及 $\sin^2\varphi=z$，并利用 B 函数的定义及计算公式.

解 曲面方程可表示为

$$z=c\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}.$$

若令 $x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则曲所围区域的体积为

$$V=c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2abc}{n}\int_0^1\sqrt[n]{1-r^n}\,r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

若令 $r^n=t$ 可得

$$\int_0^1\sqrt[n]{1-r^n}\,r\mathrm{d}r=\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{2}{n}-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}+1,\frac{2}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令 $\sin^2\varphi=t$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2n}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{n}-1}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是，所求的体积为 $$V=\frac{abc}{n^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}=\frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

【4035】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(n>0,m>0)$.

提示 令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则曲面所围区域的体积为

$$V=c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{abc}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m}+1,\frac{2}{n}\right)=\frac{abc}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)}=\frac{abc}{n+2m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}.$$

§4. 曲面面积的计算法

1° **曲面由显函数给出的情形** 光滑曲面 $z=z(x,y)$ 的面积由以下积分表示：

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为该曲面在 Oxy 平面上的投影.

2° **曲面由参数方程给出的情形** 若曲面是由参数方程给出的：

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),$$

其中$(u,v)\in\Omega$，Ω为封闭可求积的有限区域，且函数x，y和z在区域Ω内连续可微，则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【4036】 求曲面$az=xy$包含在圆柱$x^2+y^2=a^2$内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{\frac{a^2+(x^2+y^2)}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

【4037】 求以曲面$x^2+z^2=a^2$和$y^2+z^2=a^2$为界的物体的表面积.

解 如图8.48所示，两曲面的交线在Oyz平面上的投影为圆$y^2+z^2=a^2$，$x=0$.

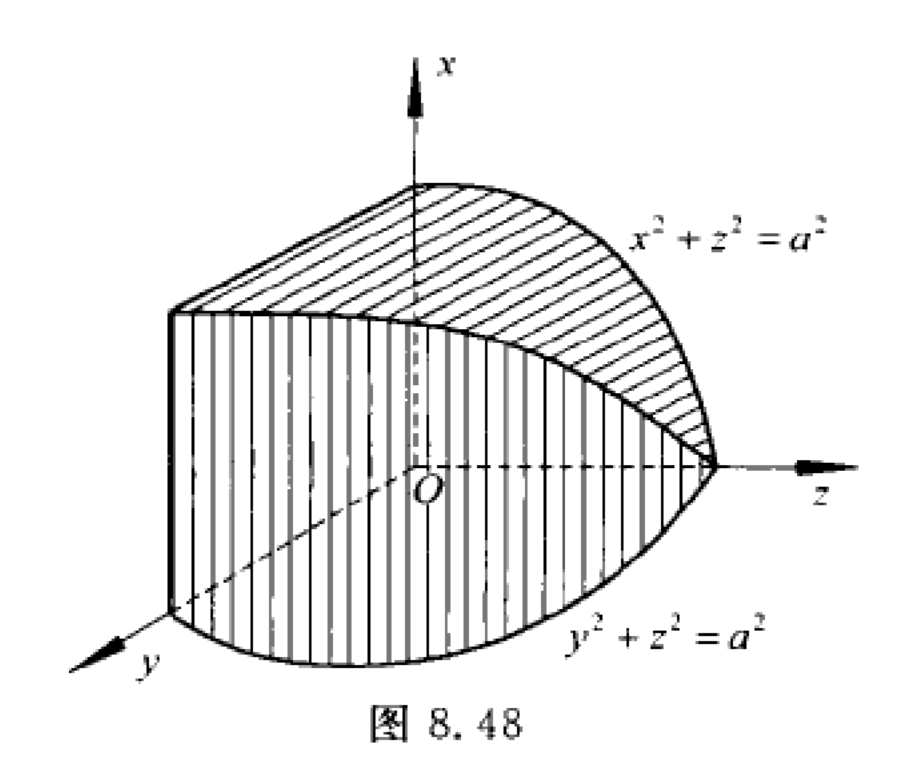


图 8.48

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=4\iint\limits_{z^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\cdot 4\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{1+0^2+\left(-\frac{z}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=16\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2}}\,\mathrm{d}y=16a\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$=16a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}z=16a^2.$$

【4038】 求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$包含在柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leqslant a)$内那部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

又积分域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$位于第一象限部分为

$$0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=2\cdot 4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y=8a\int_0^a\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

【4039】 求曲面$z^2=2xy$被平面$x+y=1$，$x=0$，$y=0$所截部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x+y}{\sqrt{xy}},$$

于是,所求的面积为

$$S=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}dy=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\left[2\sqrt{x(1-x)}+\frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x}\right]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}}dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-x}(1+2x)d(\sqrt{x})$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【4040】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 内那部分的面积(维维亚尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积.因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是,利用对称性知,割出部分的面积为

$$S=8\iint_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

于是,所求的面积为 $\qquad A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$

【4041】 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$

又积分域为:$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$. 于是,所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{2}\,rdr=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\sqrt{2}\,\pi.$$

【4042】 求曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-y^2}},$

又积分域由双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$ 所围成.于是,利用对称性知,所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\sqrt{2}\,r\frac{r\cos\varphi}{r\sqrt{\cos2\varphi}}dr=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\,d\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi)=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

【4043】 求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm1$, $x+y=\pm1$ 所截部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$,故所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy,$$

其中 Ω 为由直线 $x-y=\pm1$, $x+y=\pm1$ 围成的正方形域.为便于计算,作变换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v,\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程 $u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 围成的正方形,且 $I=1$. 于是,注意利用对称性,即得所求的面

积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du\int_{-u}^{u}\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{u\sqrt{1+2u^2}+\frac{1+u^2}{2}\left[\ln(\sqrt{1+2u^2}+u)-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)\right]\right\}du$$

$$=\frac{2}{3}(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\ln(\sqrt{1+2u^2}+u)-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)\right]d\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\left(u+\frac{u^3}{3}\right)\frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^3}{3}}{1+u^2}\frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2+5}{t^2+1}dt^{*)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)-\frac{8}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln3\right)+\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{3}\arctan\sqrt{2}$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7\ln3}{4}\right)+\frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*) 作代换 $1+2u^2=t^2$.

【4044】 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}$,

又积分域由双纽线 $r^2=a^2\sin2\varphi$ 围成. 于是,利用对称性,即得所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2}\,rdr$$

$$=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^3(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi-\frac{\pi a^2}{3}.$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\cos2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}d\varphi=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3t\,dt=2\sqrt{2}\left(\sin t-\frac{\sin^3t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{3},$$

故最后得

$$S=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

【4045】 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0$ $(x>0, y>0)$ 所截部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

于是,所求的面积为 $S=\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz=\int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz=\int_0^a\frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2.$

【4046】 求以曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 和 $x+y+z=2a$ $(a>0)$ 为界的物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$,则方程变为 $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$

由此可见,曲面所界的物体在 Oxy 平面上的投影域为以 $2a$ 为短半轴、$2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成. 对于$z=2a-x-y$，$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是，物体的表面积 $S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\,dxdy+\iint\limits_{\Omega}2dxdy=(\sqrt{3}+2)\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.$

又所截圆锥之高为 $$H=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

（即坐标原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离）. 于是，物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积： $A=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=12\pi a^2.$

因此，所求物体的体积为 $V=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$

【4047】 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

解题思路 球面的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,\quad y=R\sin\varphi\cos\psi,\quad z=R\sin\psi,$$

其中 R 为球的半径. $\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi$，又 $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$，$\psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2$，其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度，ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

解 球面的参数方程为 $x=R\cos\varphi\cos\psi$，$y=R\sin\varphi\cos\psi$，$z=R\sin\psi$，
其中 R 为球的半径. 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi+0=0,$$

故 $\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi$. 于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi d\psi=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度，ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

【4048】 求螺旋面 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=h\varphi$ 在 $0<r<a$，$0<\varphi<2\pi$ 那部分的面积.

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1,\qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=r^2+h^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

故 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2+h^2}$. 于是，所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,dr=2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2}+\frac{h^2}{2}\ln(r+\sqrt{r^2+h^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\pi a\sqrt{a^2+h^2}+\pi h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}.$$

【4049】 求环面 $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$，$y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$，$z=a\sin\psi\ (0<a\leqslant b)$
在两条经线 $\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$ 和两条纬线 $\psi=\psi_1$，$\psi=\psi_2$ 之间那部分的面积. 整个环的表面积等于什么？

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2=a^2,\qquad F=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}=0$$

故 $\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi)$. 于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)\mathrm{d}\psi=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)].$$

整个环的表面积为 $$A=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)\mathrm{d}\psi=4\pi^2ab.$$

【4050】 求矩形 $x=a>0,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$ 对坐标原点的立体角 ω. 若 a 很大，推出 ω 的近似公式.

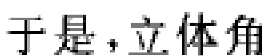
解 以原点为球心作单位球，则 ω 即为该球面含于四面体 $O-ABCD$ 内的面积，其中 $ABCD$ 是以 b、c 为边长的矩形(图 8.49).

图 8.49

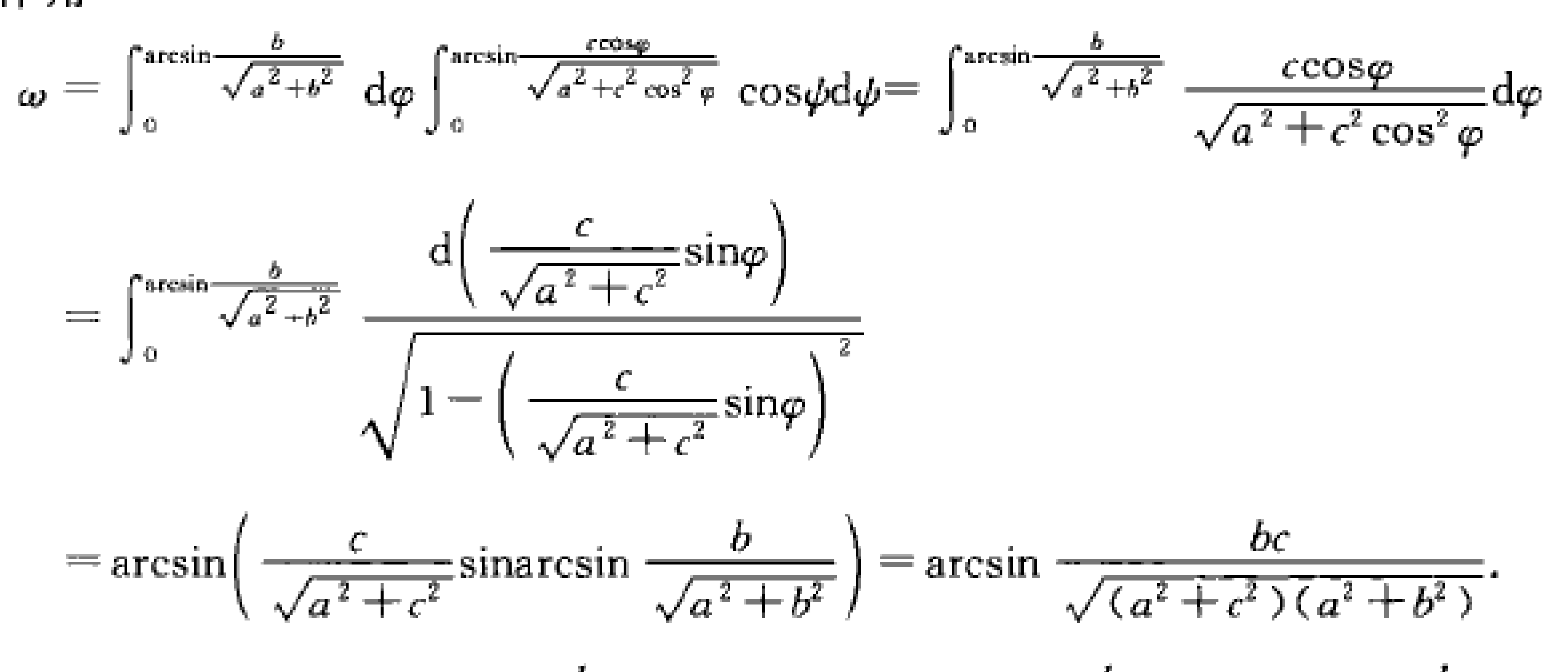
取球坐标系，由 4047 题知：$\sqrt{EG-F^2}=\cos\psi$，

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}.$$



于是，立体角



$$\omega=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}}\cos\psi\mathrm{d}\psi=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.$$

当 a 很大时，有 $$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}=\frac{bc}{a^2\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}}\approx\frac{bc}{a^2},$$

于是，得 ω 的近似公式 $\omega\approx\frac{bc}{a^2}$.

§5. 二重积分在力学上的应用

1° **质心** 若薄板 Ω 位于平面 Oxy 内，x_0，y_0 为其质心坐标，$\rho=\rho(x,y)$ 为其面密度，则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad y_0=\frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 $M=\iint_\Omega \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的，则在公式(1)中应令 $\rho=1$.

2° **转动惯量** I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量，可表示为以下公式：

$$I_x=\iint_\Omega \rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_y=\iint_\Omega \rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2}$$

其中 $\rho=\rho(x,y)$ 为薄板的面密度.

还可研究惯性积 $$I_{xy}=\iint_\Omega \rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在公式(2)中取 $\rho=1$，我们就得到平面图形的几何转动惯量.

【4051】 求边长为 a 的正方形薄板的质量，设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比，且在正方形的中心等于 ρ_0.

解 取坐标系如图 8.50 所示，则面密度 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2}$. 由于

$$\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $k=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$. 从而，$\rho=\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}$.

若引用极坐标，即得质量

$$M=\iint_{\Omega}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2dr\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right]=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,d(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\left[\frac{\tan\varphi}{2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\varphi+\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\rho_0a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})].$$

图 8.50



求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标：

【4052】 $ay=x^2$，$x+y=2a$ $(a>0)$.

解 面密度 ρ 为常数. 积分域如图 8.51 所示. 质量

$$M=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\frac{9}{2}\rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y=\rho\int_{-2x}^{a}x\,dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$M_x=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\,dy=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

于是，质心 (x_0,y_0) 为



$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{2},\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{8}{5}a.$$

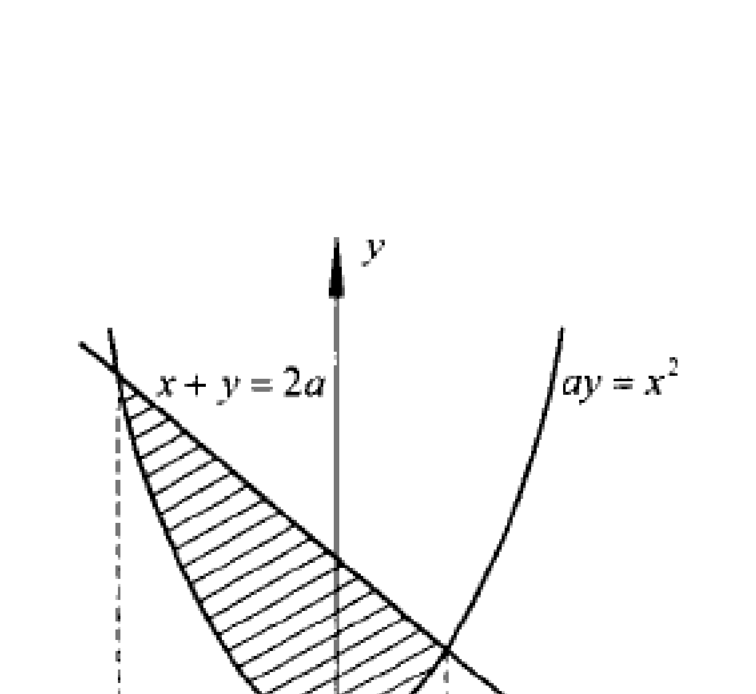


图 8.51

【4053】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$x=0$，$y=0$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{6}\rho a^2,\qquad M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{30}\rho a^3.$$

于是，质心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a}{5}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知，$x_0=y_0=\frac{a}{5}$.

【4054】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,y>0)$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t\,dt=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$$

$$=3a^2\rho\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5t\,dt=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是，质心的横坐标为 $$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知，$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}$.

*） 作代换 $x=a\cos^3 t$.

【4055】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ （线圈）.

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线，围成一图形 Ω. 作变量代换

$$x=\frac{a^2b}{c^2}r\cos^4\theta\sin^2\theta,\quad y=\frac{ab^2}{c^2}r\cos^2\theta\sin^4\theta,\quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则原曲线方程变为 $r=1$. 又容易算得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{2a^3b^3}{c^4}r(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta),$$

故（利用 3856 题的结果）

$$M=\iint_\Omega\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2a^3b^3}{c^4}\rho\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho\left[\frac{1}{2}\mathrm{B}(3,4)+\frac{1}{2}\mathrm{B}(4,3)\right]=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho\mathrm{B}(3,4),$$

$$M_y=\iint_\Omega\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2a^5b^4}{c^6}\rho\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^2\theta(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^5b^4}{c^6}\rho\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^{11}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\cos^9\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^5b^4}{c^6}\rho[\mathrm{B}(4,6)+\mathrm{B}(5,5)].$$

于是， $$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2b}{3c^2}\ \frac{\mathrm{B}(4,6)+\mathrm{B}(5,5)}{\mathrm{B}(3,4)}.$$

由于 $\mathrm{B}(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3!\cdot5!}{9!}$， $\mathrm{B}(5,5)=\frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)}=\frac{(4!)^2}{9!}$， $\mathrm{B}(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!\cdot3!}{6!}$，

代入，化简得 $$x_0=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{6!\ [3!\cdot5!\ +(4!)^2]}{2!\cdot3!\cdot9!}=\frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理，可求得质心的纵坐标为 $$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_\Omega\rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_\Omega\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{ab^2}{14c^2}.$$

【4056】 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy\quad(x>0,y>0)$.

解 曲线的极坐标方程为 $r^2=a^2\sin2\varphi$，质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\iint_\Omega\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}r\mathrm{d}r=\frac{\rho a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\rho a^2}{2},$$

$$M_y=\iint_\Omega\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin2\varphi}}r\cdot r\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^{\frac{3}{2}}2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right)^{*)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\ \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\ \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\cdot2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\rho a^3\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\pi\rho a^3.$$

于是，质心的横坐标为 $x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\pi a}{8}$. 由关于直线 $y=x$ 的对称性知，$x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$.

*） 利用 3856 题的结果.

【4057】 $r=a(1+\cos\varphi)$，$\varphi=0$.

解 质量和对 Oy 轴、Ox 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{4}\pi\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1-\cos\varphi)} r\cdot r\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\rho a^3}{3}\left[\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t\mathrm{d}t-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\mathrm{d}t\right]=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\cdot\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-16\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{5\pi\rho a^3}{8},$$

$$M_x=\rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1-\cos\varphi)} r\cdot r\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{\rho a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是,质心的坐标为 $x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{5}{6}a,\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{16}{9\pi}a.$

【4058】 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),y=0.$

解 质量和对 Ox 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}\mathrm{d}y=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi\rho a^2,$$

$$M_x=\rho\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

于是,质心的纵坐标为 $y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{6}a.$

由对称性知,$x_0=\pi a$.

【4059】 求圆形薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的质心坐标.设它在点 $M(x,y)$的面密度与点 M 到点 $A(a,0)$的距离成正比.

解 按题设,面密度 $\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ (k 为常数).于是,质量为

$$M=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=k\int_{-a}^{a}\left[y\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x-a)^2\ln(y+\sqrt{(x-a)^2+y^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x}\mathrm{d}x-k\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{2}\ln(a-x)\right](a-x)^2\mathrm{d}x+k\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})\mathrm{d}x$$

$$=I_1-I_2+I_3.$$

由于

$$I_1=k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}\left[-(a+x)^{\frac{3}{2}}+2a(x+a)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x=\sqrt{2a}k\left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{4a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{32}{15}ka^3,$$

$$I_2=\frac{k}{2}\int_0^{2a}t^2\ln t\mathrm{d}t=\frac{k}{6}t^3\ln t\Bigg|_0^{2a}-\frac{k}{6}\int_0^{2a}t^3\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}ka^3\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3,$$

$$I_3=k\cdot2\int_0^{\sqrt{2a}}t(2a-t^2)^2\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t=8a^2k\int_0^{\sqrt{2a}}t\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t-8ka\int_0^{\sqrt{2a}}t^3\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t$$

$$+2k\int_0^{\sqrt{2a}}t^5\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t=8ka^2\left(\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{2a}\right)-8ka\left(\frac{7}{12}a^2+a^2\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$+2k\left(\frac{37}{45}a^3+\frac{4}{3}a^3\ln\sqrt{2a}\right)=\frac{44}{45}ka^3+\frac{8}{3}ka^3\ln\sqrt{2a}=\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a.$$

因而最后得 $M=\frac{32}{15}ka^3-\left(\frac{4}{3}ka^3\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3\right)+\left(\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a\right)=\frac{32}{9}ka^3.$

仿照上述方法可求得一次矩 $M_y=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}kx\sqrt{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{32}{45}ka^4.$

而由对称性得:$M_x=0$.于是,质心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{5},\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=0.$$

【4060】 求曲线 $y=\sqrt{2px}$, $y=0$, $x=X$ 所围图形的质心在参数 X 变化时所描绘的曲线.

解 变动面积的质量为 $M=\rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}}$,

而一次矩 $M_y=\rho\int_0^X x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}}$, $M_x=\rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} y\mathrm{d}y=\rho\frac{1}{2}pX^2$.

于是,变动面积的质心为 $x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X$, $y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}$.

因此,质心的轨迹方程为 $y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$,

此即所求的曲线方程,其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所围的面积($\rho=1$)对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y:

【4061】 $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$, $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$, $y=0$ ($b_1>0, b_2>0, h>0$).

解 若设 $b_2>b_1$,则

$$I_x=\int_0^h y^2\mathrm{d}y\int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2}\mathrm{d}x=(b_2-b_1)\int_0^h y^2\left(1-\frac{y}{h}\right)\mathrm{d}y=\frac{(b_2-b_1)h^3}{12},$$

$$I_y=\int_0^h \mathrm{d}y\int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2}x^2\mathrm{d}x=\frac{b_2^3-b_1^3}{3}\int_0^h\left(1-\frac{y}{h}\right)^3\mathrm{d}y=\frac{h(b_2^3-b_1^3)}{12};$$

若设 $b_1>b_2$,则 $I_x=\frac{(b_1-b_2)h^3}{12}$, $I_y=\frac{h(b_1^3-b_2^3)}{12}$.

【4062】 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ ($0\leqslant x\leqslant a$).

解
$$I_x=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^a[a^3-3a^2\sqrt{2ax-x^2}+3a(2ax-x^2)-(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\left[a^3x-3a^2\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{2}\right)+3a^2x^2-ax^3\right]\Bigg|_0^a-\frac{1}{3}\int_0^a(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4\cos^4 t\mathrm{d}t^{*)}=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{a^4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^4}{16}(16-5\pi).$$

利用图形的对称性,即得 $I_y=I_x=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$.

*) 作代换 $x-a=a\sin t$.

【4063】 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所围的平面域可表示为 $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\varphi)$.

于是,

$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\sin^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16}=\frac{21}{32}\pi a^{4*)}.$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\cos^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+6\cos^4\varphi+4\cos^5\varphi+\cos^6\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

*) 对于任意正整数 n,有 $\int_0^{\pi}\cos^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\mathrm{d}\varphi, & n\text{ 为偶数};\\ 0, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

为算出 I_x、I_y 的值，也可变换被积函数的形式，直接用换元法计算，这样较简单. 事实上，我们有

$$I_x=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi=2^6a^4\int_0^{\pi}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2^6a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x(1-\cos^2x)dx=2^6a^4\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}\left(1-\frac{11}{12}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4d\varphi-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=2^4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8xdx-\frac{21}{32}\pi a^4=\frac{70}{32}\pi a^4-\frac{21}{32}\pi a^4=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

【4064】 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 曲线的图像关于两坐标轴和直线 $y=x$ 是对称的，参看 1542 题的图像. 曲线的极坐标方程为

$$r^2=\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi).$$

根据对称性，只要算出从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 那部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果，并且显然有 $I_x=I_y$. 于是，我们有

$$I_x=I_y=4\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}}r^3dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\varphi\right)^2}=16a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{(3+\cos4\varphi)^2}=\frac{4a^4}{9}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)^2}{}^{*)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\left[-\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)}+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}{}^{**)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\cdot2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.$$

*) 作代换 $x=4\varphi$.

**) 利用 2063 题的结果.

【4065】 $xy=a^2,xy=2a^2,x=2y,2x=y\ (x>0,y>0)$.

解 作代换 $xy=u,\frac{y}{x}=v$，则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}},y=\sqrt{uv}$，且雅可比行列式的绝对值 $|I|=\frac{1}{2v}$，曲线所围的面积即积分域变为

$$a^2\leqslant u\leqslant2a^2,\quad\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2.$$

于是，$$I_x=\iint_{\Omega}y^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^2dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{uv}{2v}du=\frac{9a^4}{8},\quad I_y=\iint_{\Omega}x^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^2dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{u}{2v^2}du=\frac{9a^4}{8}.$$

【4066】 求曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围区域 S 的极转动惯量

$$I_0=\iint_S(x^2+y^2)dxdy.$$

解 引用极坐标，则图形 S 的界线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性，得 $I_0=\iint_S(x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}r^3dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos^22\varphi d\varphi=\frac{\pi a^4}{8}.$

【4067】 证明公式： $$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$
其中 I_l,I_{l_0} 是图形 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量，其中 l_0 是通过图形的质心，而 d 为两轴间的距离.

证明思路 取 l_0 轴为 Ox 轴，图形 S 的质心为坐标原点，则 $I_l=\iint\limits_S (y-d)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由题设即易获证.

证 取 l_0 轴为 Ox 轴，图形的质心为坐标原点，则

$$I_l=\iint\limits_S (y-d)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2d\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+d^2\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 l_0 通过图形 S 的质心，故 $y_0=\frac{1}{S}\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$， 即 $\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

又 $$\iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_{l_0},\qquad \iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=S,$$

于是，$I_l=I_{l_0}+Sd^2$.

【4068】 证明：平面图形 S 对通过其质心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为惯性积：

$$I_{xy}=\iint\limits_S \rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明思路 取直角坐标系 $Ox'y'$，使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α，则有

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\quad 且\quad |I|=\left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=1.$$

于是，所求的转动惯量为 $I=\iint\limits_S y'^2\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$. 由题设即易获证.

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$，使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α，则有

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换，雅可比行列式的绝对值 $|I|=\left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=1$.

于是，

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_S y'^2\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\iint\limits_S(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\cos^2\alpha\iint\limits_S\rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\sin\alpha\cos\alpha\iint\limits_S\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sin^2\alpha\iint\limits_S\rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

【4069】 求以 a 为边的正三角形对通过三角形质心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

解 利用 4068 题的结果，取质心为坐标原点. 不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边，则过质心与高成 α 角的直线，即为过坐标原点与 Ox 轴成 α 角的直线. 于是，所求的转动惯量为

$$I_\alpha=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程分别为

$$y=-\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad y=-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以，根据对称性知：

$$\begin{aligned}I_x&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}y^2\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3\right]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}ax^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2x+\frac{\sqrt{3}}{24}a^3\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{64}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}};\end{aligned}$$

$$I_{xy}=\iint\limits_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$$

$$I_y=2\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}x^2\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{a}{2}}x^2\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\frac{\sqrt{3}a}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是，
$$I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\cos^2\alpha+\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\sin^2\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

【4070】 设圆柱形容器 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$ 内盛有水，水平面为 $z=h$，求水对容器侧壁 $x\geqslant 0$ 的压力.

解 用 X 和 Y 分别表示压力在 Ox 与 Oy 轴上的投影. 由对称性，显然有 $Y=0$. 下面求 X. 由于 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，而在面元 $\mathrm{d}S$ 上的压力在 Ox 轴上的投影 $\mathrm{d}X$ 为 $(z\mathrm{d}S)\cos\theta$. 于是，

$$X=\iint_S z\cos\theta\mathrm{d}S=\iint_S az\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^h z\mathrm{d}z\right)=ah^2.$$

【4071】 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h(由球心算起)的地方，这里 $h\geqslant a$. 求液体对球的上表面和下表面的压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则在球面上的点 (x,y,z) 处沉入液体的深度 d 为
$$d=h-z\quad(-a\leqslant z\leqslant h).$$
于是，上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为
$$d=h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\quad d=h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$
根据对称性知，压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的投影均为零，故只要计算压力在 Oz 轴上的投影，液体作用于球的上表面和下表面的压力分别记以 p_1 和 p_2，并设 γ 为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与 Oz 轴正向的夹角，则
$$p_1=\iint_{S_1}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-h\pi a^2\delta+\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$
$$=-h\pi a^2\delta+\left[\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right]\Bigg|_0^a=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right)\quad(p_1<0\text{ 表示压力向下}).$$
同理，我们有
$$p_2=\iint_{S_2}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right)\quad(p_2>0\text{ 表示压力向上}).$$

【4072】 底半径为 a 高为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中，其中心在液面下的深度为 h，而圆柱的轴与竖直方向成 α 角，求液体对圆柱上底和下底的压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点，取 Oxy 平面是水平的，再取圆柱的轴(朝上的方向)在 Oxy 平面上的投影所在的方向为 Ox 轴，取 Oz 轴垂直向上，最后取 Oy 轴使 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴构成右手系.

于是，液面方程为 $z=h$. 设圆柱上底为 S_1，下底为 S_2，则 S_1 所在平面的方程为
$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=\frac{b}{2},\tag{1}$$
S_2 所在平面的方程为
$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=-\frac{b}{2}.\tag{2}$$
在点 (x,y,z) 处 $(z\leqslant h)$ 液体的深度为 $h-z$. 用 X_1，Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上的压力在 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样，用 X_2，Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上的压力在 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然，$Y_1=Y_2=0$. 我们有
$$X_1=-\iint_{S_1}\delta(h-z)\sin\alpha\mathrm{d}S=-\delta\sin\alpha\iint_{S_1}(h-z)\mathrm{d}S,\tag{3}$$
$$Z_1=-\iint_{S_1}\delta(h-z)\cos\alpha\mathrm{d}S=-\delta\cos\alpha\iint_{S_1}(h-z)\mathrm{d}S.\tag{4}$$
由(1)式知，在 S_1 上有 $z=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right)$. 于是，注意到 S_1 的面积为 πa^2，可知

$$\iint_{S_1}(h-z)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}\left[h-\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}S=\left(h-\frac{b}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\right)\iint_{S_1}\mathrm{d}S+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1}x\mathrm{d}S.$$

由于$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$是$S_1$的质心的$x$坐标,也即$\frac{b}{2}\sin\alpha$,故$\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\pi a^2 b\sin\alpha$.代入即得

$$\iint_{S_1}(h-z)\mathrm{d}S=\left(h-\frac{b}{2\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^2 b\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2,$$

以此代入(3)式与(4)式,得 $X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$.

同理,我们有 $X_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\sin\alpha\mathrm{d}S=\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)\mathrm{d}S$, $Z_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\cos\alpha\mathrm{d}S=\delta\cos\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)\mathrm{d}S$.

再注意到(2)式,类似地可计算得

$$\iint_{S_2}(h-z)\mathrm{d}S=\iint_{S_2}\left[h+\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}+x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}S=\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

于是, $X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$.

【4073】 求均匀的圆柱体$x^2+y^2\leqslant a^2$,$0\leqslant z\leqslant h$对质点$P(0,0,b)$的引力,设圆柱的质量等于M,而质点的质量等于m.

解 根据对称性知,引力在Ox轴和Oy轴上的投影等于零,故只要计算引力在Oz轴上的投影F_z.今取圆环,其体积为

$$\mathrm{d}V=2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

则相应的质量为 $$\mathrm{d}M=\frac{2\pi rM\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\pi a^2 h}=\frac{2Mr}{a^2h}\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

吸引质点P的引力 $$\mathrm{d}F_z=-\frac{2krmM(b-z)}{a^2h\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

于是,所求的引力为

$$F_z=-\frac{2kmM}{a^2h}\int_0^h\int_0^a\frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z=-\frac{2kmM}{a^2h}\left[\int_0^h\operatorname{sgn}(b-z)\mathrm{d}z-\int_0^h\frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}}\mathrm{d}z\right]$$

$$=-\frac{2kmM}{a^2h}\left[|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right],$$

其中k为引力常数.

【4074】 物体对挤压面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

的压强分布由公式 $$p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

给出.求物体对此面的平均压强.

解 物体在椭圆面上的平均压强为

$$p_{cp}=\frac{1}{\pi ab}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 p_0(1-r^2)abr\mathrm{d}r=\frac{4}{\pi ab}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p_0ab}{4}=\frac{p_0}{2}.$$

【4075】 以a和b为边的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草,其面密度为p.若运送质量为M的货物到距离为r的地方所需的功为$kMr(0<k<1)$,则为了把所有的干草集中在草地的中心,至少应消耗多少功?

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心,Ox轴平行于a边,Oy轴平行于b边.由于将面积$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$上的干草移到中心要消耗的功为$\mathrm{d}W=kp\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并利用对称性,即知所要求的功为

$$W=4kp\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=4kp\left[\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}}r^2drd\varphi+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}}r^2drd\varphi\right]$$

$$=\frac{kp}{6}\left[a^3\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi+b^3\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi\right].$$

但是，

$$\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi=\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{b}{a}\ *)}=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

$$\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi=\left[-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right|\right]\Bigg|_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}\ **)}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b},$$

于是，我们有 $$W=\frac{kp}{12}\left(2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

*) 利用 2000 题的结果.

**) 利用 1999 题的结果.

§6. 三重积分

1° **三重积分的直接计算法** 函数 $f(x,y,z)$ 是连续的，且有界区域 V 由下列不等式给出：

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 皆为连续函数，则函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_{x_1}^{x_2}dx\iint\limits_{S(x)}f(x,y,z)dydz,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $x=$ 常数截区域 V 所得的截面.

2° **三重积分中的变量代换** 若连续可微函数

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w)$$

给出 $Oxyz$ 空间的有界可求积的三维闭区域 V 与 $O'uvw$ 空间的区域 V' 之间的一一映射，并且当 $(u,v,w)\in V'$ 时，

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'}f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|I|\,dudvdw.$$

在特殊情况下，有：1) 圆柱坐标系 φ,r,h，其中

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r.$$

2) 球坐标系 φ,ψ,r，其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

【4076】 $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$ 所围的区域.

解 $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\frac{1}{364}.$

【4077】 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$,其中 V 是曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right] \Bigg|_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy$

$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)} \right] \Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx$

$= \left[-\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x) \right] \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$

【4078】 $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$,其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解 $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2}\int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy$

$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.$

【4079】 $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$,其中 V 是曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所围的区域.

解题思路 设 P_x, Q_y, R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=$ 常数, $y=$ 常数, $z=$ 常数所截部分在 Oyz、Ozx、Oxy 平面上的投影,则有

$$\text{原式} = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2} dx \iint\limits_{P_x} dydz + \int_{-b}^{b} \frac{y^2}{b^2} dy \iint\limits_{Q_y} dzdx + \int_{-c}^{c} \frac{z^2}{c^2} dz \iint\limits_{R_z} dxdy.$$

解 设 P_x, Q_y, R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=$ 常数, $y=$ 常数, $z=$ 常数所截部分在 Oyz、Ozx、Oxy 平面上的投影,则有

$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2} dx \iint\limits_{P_x} dydz + \int_{-b}^{b} \frac{y^2}{b^2} dy \iint\limits_{Q_y} dzdx + \int_{-c}^{c} \frac{z^2}{c^2} dz \iint\limits_{R_z} dxdy$

$= \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx^{*)} + \frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy + \frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 3 \cdot \frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}.$

*) P_x 在平面 $x=$ 常数上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

故其面积为 $\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$

Q_y 及 R_z 的面积类推.

【4080】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$,其中 V 是曲面 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 所围的区域.

解题思路 注意曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$. 则有

$$\text{原式} = \iint\limits_Q dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dz.$$

解 曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$. 于是,

$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint\limits_\Omega dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] dxdy$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^2) r dr = \frac{\pi}{6}.$

在下列三重积分内，用不同方法配置积分的上下限：

【4081】 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$

解 有界区域 V 如图 8.52 所示.

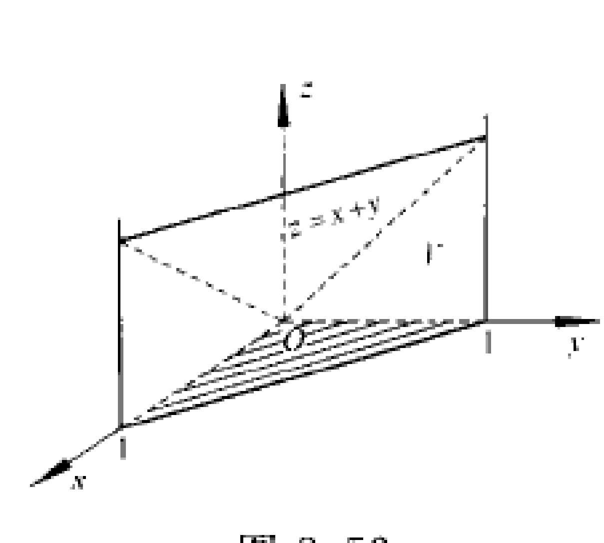


图 8.52

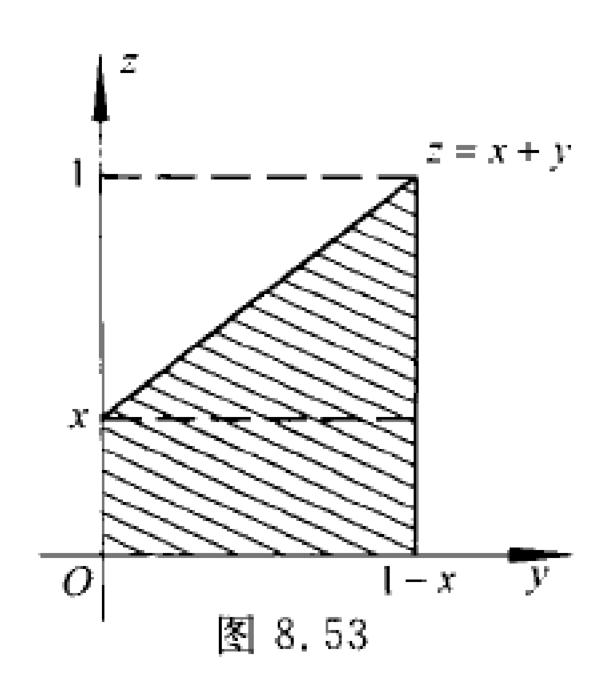


图 8.53

如果先对 y 积分，再对 z、x 积分，如图 8.53 所示，则积分域在 Oyz 平面上的投影域由诸直线

$$z=0,\quad z=x+y,\quad y=0,\quad y=1-x\quad (x\text{ 固定})$$

围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\}^{*)},$$

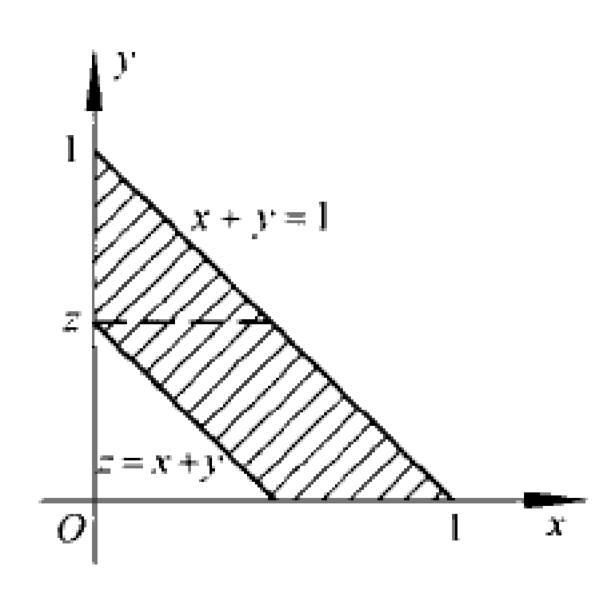


图 8.54

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 8.54 所示，则有

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}.$$



*） 这里用的公式为

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz.$$

【4082】 $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz.$

解 有界区域 V 如图 8.55 所示.

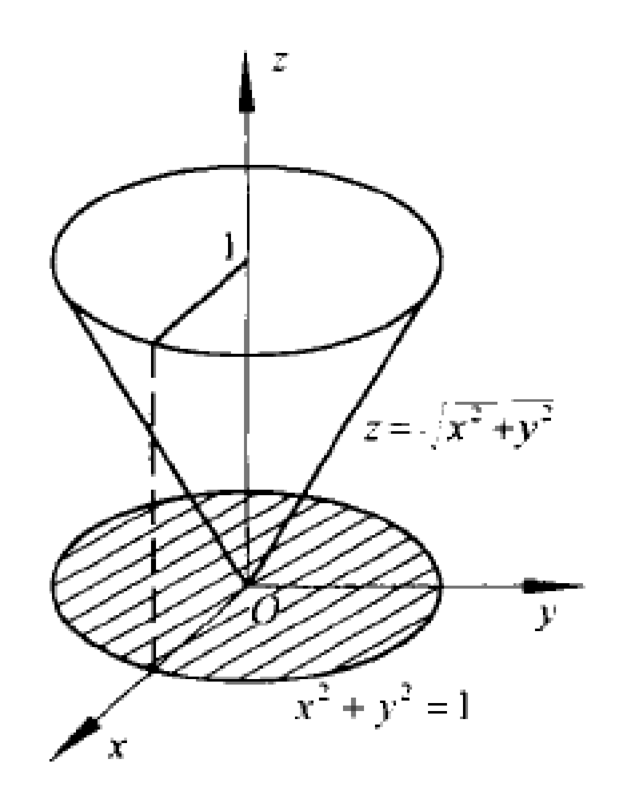


图 8.55

如果先对 y 积分，再对 z，x 积分，如图 8.56 所示，则积分域在 Oyz 平面上的投影域由不等式

$$|x|\leqslant z\leqslant 1,\quad -\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2},$$

（x 固定）给出. 于是，我们有

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy.$$

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 8.57 所示，则有

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx.$$

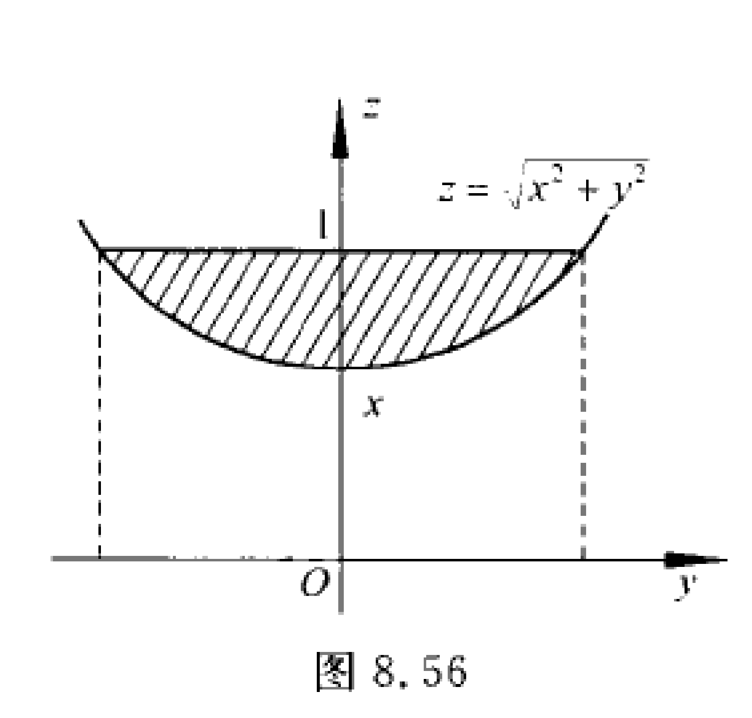


图 8.56

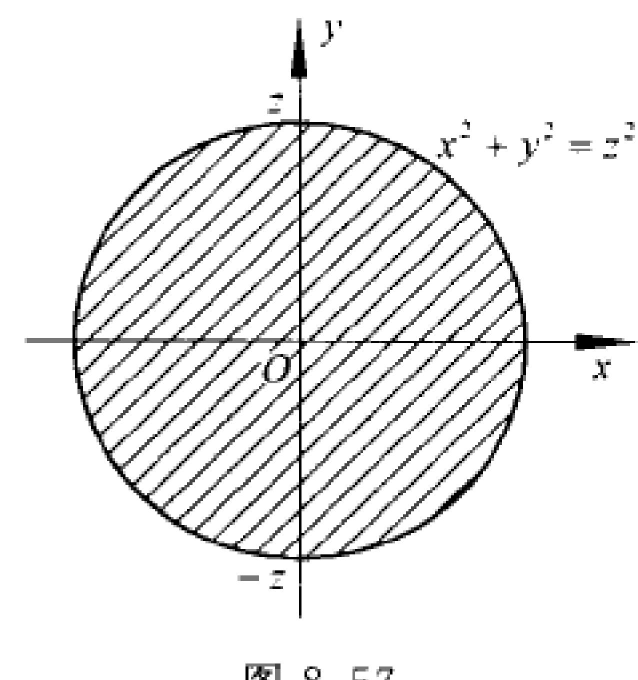


图 8.57

【4083】 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$

解 如果先对 y 积分，再对 z、x 积分，则积分域在 Oxy 平面上的投影域*) 由方程

$$x=1,\ z=0,\ z=x^2 \quad 及 \quad x=0,\ x=1,\ z=x^2,\ z=x^2+1$$

所表示的曲线围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz=\int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy\right].$$

如果先对 x 积分，再对 z、y 积分，不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，则积分域在 Oyz 平面上的投影域由方程

$$y=1,\ z=0,\ y=\sqrt{z} \quad 及 \quad y=0,\ y=1,\ y=\sqrt{z},\ y=\sqrt{z-1}$$

所表示的曲线围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left[\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx+\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\right]+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx.$$

*) 这里采用的投影方式与前两题不同，系用结果

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_S dxdz\int_{y_1}^{y_2} f(x,y,z)dy.$$

以一重积分代替三重积分：

【4084】 $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta$

解 $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta=\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\zeta\int_\zeta^\xi f(\zeta)d\eta=\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta)d\zeta=\int_0^x d\zeta\int_\zeta^x f(\zeta)(\xi-\zeta)d\xi$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2 d\zeta.$$

【4085】 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz.$

解 化为先对 y 积分，再对 x、z 积分，可将原积分表示成如下两部分：

$$\int_0^1 dz\left[\int_z^1 dx\int_0^1 f(z)dy+\int_0^z dx\int_{z-x}^1 f(z)dy\right]=\int_0^1 dz\int_z^1 f(z)dx+\int_0^1 dz\int_0^z f(z)(1-z+x)dx$$

$$=\int_0^1 f(z)(1-z)dz+\int_0^1 f(z)(1-z)zdz+\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)z^2dz$$

$$=\int_0^1 f(z)\left(1-\frac{z^2}{2}\right)dz=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz;$$

$$\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 f(z)dy=\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x)dx=\int_1^2\left[f(z)(1-z)x+\frac{1}{2}f(z)x^2\right]\Big|_{z-1}^1 dz$$

$$=\int_1^2 f(z)\left[1-z+(z-1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]dz=\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(z-2)^2dz,$$

于是， $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz+\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(2-z)^2dz.$

【4086】 设 $f(x,y,z)=F'''_{xyz}(x,y,z)$，且 a,b,c,A,B,C 为常数，求

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz.$$

解 $\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz=\int_a^A dx\int_b^B [F''_{xy}(x,y,C)-F''_{xy}(x,y,c)]dy$

$=\int_a^A [F'_x(x,B,C)-F'_x(x,b,C)-F'_x(x,B,c)+F'_x(x,b,c)]dx$

$=F(A,B,C)-F(a,B,C)-F(A,b,C)+F(a,b,C)-F(A,B,c)+F(a,B,c)+F(A,b,c)-F(a,b,c).$

变换为球坐标，计算积分：

【4087】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant\sin\psi$，且 $|I|=r^2\cos\psi$.

解 令 $x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$，则曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 化为 $r=\sin\psi$. 从而，

$$V:0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\psi,\ |I|=r^2\cos\psi.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sin\psi} r\cdot r^2\cos\psi dr=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi d\psi=\frac{\pi}{10}.$$

【4088】 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz.$

提示 注意积分域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$.

解 变换为球坐标，积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}.$$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cos\psi\cdot r^2\sin^2\psi dr=\frac{1}{5}4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi d\psi$$

$$=\frac{\pi}{5}2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\psi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

【4089】 在积分中变换为球坐标：

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$

其中 V 是曲面 $z=x^2+y^2$，$x=y$，$x=1$，$y=0$，$z=0$ 所围的区域.

解 引用球坐标，由 $x=y$，$x=1$，$y=0$ 知：$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$（图 8.58）.

又从原点引半射线，由曲面 $z=x^2+y^2$ 穿进，平面 $x=1$ 穿出，于是，得 r 的下限为 $r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，$r$ 的上限为 $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$. 而 ψ 的变化域由 $z=0$ 到 $z=x^2+y^2$，$x=1$ 所决定，即

$$0\leqslant\psi\leqslant\arctan\frac{1}{\cos\varphi}{}^{*)}.$$

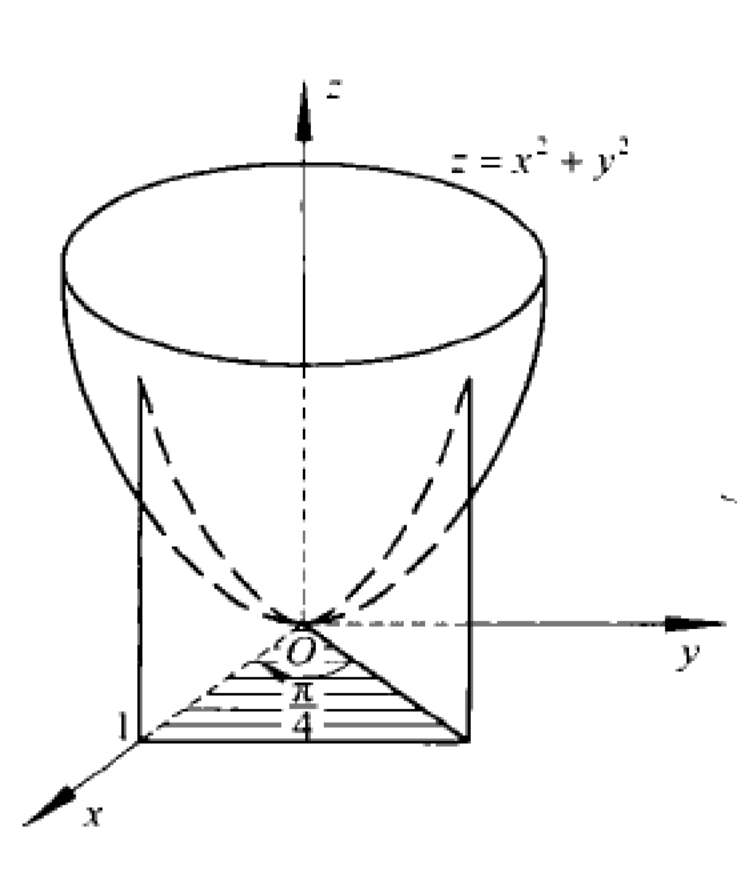


图 8.58

于是，

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r)\mathrm{d}r.$$

*） 因为 $x=1$ 对应 $r=\dfrac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$，$z=x^2+y^2$ 对应 $r=\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，故 $\dfrac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，即 $\psi=\arctan\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

【4090】 进行适当的变量代换，计算三重积分

$$\iiint_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 为椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,
则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$，且对于 V 的 $\dfrac{1}{8}$ 部分(第一卦限)有 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant\psi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant r\leqslant 1$.

解 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,
则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$，且对于 V 的 $\dfrac{1}{8}$ 部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^1 abcr^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2 abc}{4}.$$

【4091】 变换为圆柱坐标，计算积分 $\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 2$, $\dfrac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2$，且 $|I|=r$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$，则 $x^2+y^2=2z$ 化为 $r^2=2z$. 积分域

$$V:0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2,\ \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2.\quad |I|=r.$$

于是，
$$\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z=\frac{16\pi}{3}.$$

【4092】 计算积分

$$\iiint_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 V 是曲面 $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $x=h$ $(h>0)$ 所围的区域.

解题思路 作变量代换 $\dfrac{z}{y^2}=u$, $\dfrac{z}{x}=v$, $z=w$，则有 $x=\dfrac{w}{v}$, $y=\sqrt{\dfrac{w}{u}}$, $z=w$ 及 $|I|=\dfrac{w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}$，且区域 V 为 $a\leqslant u\leqslant b$, $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$, $0\leqslant w\leqslant h$，且 $|I|=\dfrac{\omega\sqrt{\omega}}{2u\sqrt{u}v^2}$.

解 作变换 $\dfrac{z}{y^2}=u$, $\dfrac{z}{x}=v$, $z=w$，则 $x=\dfrac{w}{v}$, $y=\sqrt{\dfrac{w}{u}}$, $z=w$. 从而，积分域变为

$$V:a\leqslant u\leqslant b,\ \alpha\leqslant v\leqslant\beta,\ 0\leqslant w\leqslant h,$$

且雅可比行列式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{w}{v^2} & \dfrac{1}{v} \\ \dfrac{-\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}.$$

于是，$\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^h w^{\frac{7}{2}}\,dw\int_\alpha^\beta \frac{1}{v^4}\,dv\int_a^b \frac{1}{2u\sqrt{u}}\,du=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}.$

【4093】 求积分
$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz,$$
其中 V 位于 $x>0,y>0,z>0$ 这一卦限内且由下列曲面围成：
$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\ z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\quad (0<a<b,0<\alpha<\beta,0<m<n).$$

解题思路 作变量代换 $\frac{z}{x^2+y^2}=u,xy=v,\frac{y}{x}=w$，则有 $x=\sqrt{\frac{v}{w}},y=\sqrt{vw},z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right)$ 及 $|I|=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right)$，且区域 V 变为 $\frac{1}{n}\leqslant u\leqslant\frac{1}{m},\ a^2\leqslant v\leqslant b^2,\ \alpha\leqslant w\leqslant\beta$.

解 作变换 $\frac{z}{x^2+y^2}=u,xy=v,\frac{y}{x}=w$，则 $x=\sqrt{\frac{v}{w}},y=\sqrt{vw},z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right)$，且

$$I=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}}\\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\\ v\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & uv\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\end{vmatrix}=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

$$V:\ \frac{1}{n}\leqslant u\leqslant\frac{1}{m},\ a^2\leqslant v\leqslant b^2,\ \alpha\leqslant w\leqslant\beta.$$

于是，
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz&=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{u}{2}\,du\int_{a^2}^{b^2}v^3\,dv\int_\alpha^\beta\left(w+\frac{1}{w^3}+\frac{2}{w}\right)dw\\&=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].\end{aligned}$$

【4094】 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 内的平均值.

解 区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 即
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4},$$
其体积 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 作变换：$x=r\cos\varphi\cos\psi+\frac{1}{2},\ y=r\sin\varphi\cos\psi+\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}+r\sin\psi$,

则有
$$\begin{aligned}f_{平均}&=\frac{1}{V}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\\&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\left(\frac{3}{4}+r^2+r\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi+r\sin\varphi\cos\psi\right)dr\\&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\left(\frac{3}{4}+r^2\right)dr=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{20}\cos\psi\,d\psi=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{20}\,d\varphi\\&=\frac{1}{V}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}\pi}{5}=\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

【4095】 求函数 $f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ 在区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$ 内的平均值.

解 由于区域 $V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$ 为椭球，其体积等于 $\frac{4}{3}\pi abc$，故平均值为
$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

若作变换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi,y=br\sin\varphi\cos\psi,z=cr\sin\psi$，并利用对称性，则有

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abce^r r^2\cos\psi\mathrm{d}r=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^1 r^2e^r\mathrm{d}r\right)=3(e-2).$$

【4096】 利用中值定理,估计积分

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $a^2+b^2+c^2>R^2$.

解 由积分中值定理,有

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,\tag{1}$$

其中 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$. 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

代表点 (x,y,z) 与点 (a,b,c) 之间的距离,显然在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 中此距离的最小值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$,最大值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$,并且只在一个点达到最小值,也只在一个点达到最大值. 因此,函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 中的最大值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$,最小值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$,并且只在一个点达到最大值,也只在一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值,也不可能是函数的最小值. 事实上,例如,若是最大值,即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

则由(1)式知

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\tag{2}$$

其中

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

显然,在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 上 $f(x,y,z)\geqslant 0$ 且 $f(x,y,z)$ 为连续函数. 于是,由(2)式知在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 上必有 $f(x,y,z)\equiv 0$,这显然是不可能的. 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}<\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

即 $$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R<\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

故 $$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R,$$

其中 $|\theta|<1$. 于是,由(1)式得 $$u=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}.$$

【4097】 证明:若函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内是连续的,且对于任何区域 $\omega\subset V$ 有

$$\iiint\limits_{\omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

则当 $(x,y,z)\in V$ 时,$f(x,y,z)\equiv 0$.

提示 *用反证法及积分中值定理.*

证 用反证法. 若当 $(x,y,z)\in V$ 时,$f(x,y,z)\not\equiv 0$. 不失一般性,设对于 V 的某内点 (x_0,y_0,z_0),有 $f(x_0,y_0,z_0)>0$,则由于 $f(x,y,z)$ 的连续性,故存在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个闭邻域 $\omega'\subset V$,使当 $(x,y,z)\in\omega'$ 时,$f(x,y,z)>0$. 这样一来,利用中值定理,即有

$$\iiint\limits_{\omega'}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{\omega'}>0,$$

其中$(\xi,\eta,\zeta)\in\omega'\subset V$. 这与假设$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$矛盾. 因此，当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\equiv 0$.

【4098】 求$F'(t)$，设：

(1) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$f$为可微函数；

(2) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$f$为可微函数.

提示 (1)作球坐标变换；(2)作变量代换$x=t\xi$, $y=t\eta$, $z=t\zeta$.

解 (1)作球坐标变换得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

于是，$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$.

(2)作变换$x=t\xi$, $y=t\eta$, $z=t\zeta$得

$$F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f(t^3\xi\eta\zeta)t^3\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

于是，

$$F'(t)=3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} t^2 f(t^3\xi\eta\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f'(t^3\xi\eta\zeta)t^5\xi\eta\zeta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{3}{t}\Big[F(t)+\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f'(xyz)xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big].$$

【4099】 求$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$m,n,p$为非负整数.

解 分两种情况：

(1) 设m,n,p中至少有一个是奇数. 例如，设p为奇数. 于是，

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\z\geqslant 0}} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\z\leqslant 0}} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I_1+I_2.$$

今在积分I_2中作变量代换$x=u,y=v,z=-w$，则$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=-1$，从而，注意到$p$为奇数，可知

$$I_2=-\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2+w^2\leqslant 1\\w\geqslant 0}} u^m v^n w^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=-I_1,$$

于是，$I=I_1-I_1=0$.

(2) 设m,n,p均为偶数. 此时被积函数$x^m y^n z^p$关于三个坐标平面皆对称. 于是，

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

引用球坐标，$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，得

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+n+1}\psi\sin^p\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^{m+n+p+2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{m+n+p+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}{}^{*)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}}\cdot\pi\sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{\pi}{2(m+n+p+3)}\cdot\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故 $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz=\frac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$

*） 利用 3856 题的结果.

【4100】 令 $x+y+z=\xi$，$y+z=\xi\eta$，$z=\xi\eta\zeta$，计算狄利克雷积分

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz\quad(p>0,q>0,r>0,s>0),$$

其中 V 是平面 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围的区域.

解 由假设知 $x=\xi(1-\eta)$，$y=\xi\eta(1-\zeta)$，$z=\xi\eta\zeta$.

在此变换下可求得 $|I|=\xi^2\eta$，并且积分域 V 变为：

$$0<\xi<1,\ 0<\eta<1,\ 0<\zeta<1.$$

于是，

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\,d\xi\int_0^1\eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\,d\eta\int_0^1\zeta^r(1-\zeta)^q\,d\zeta$$

$$=B(p+q+r+3,s+1)B(q+r+2,p+1)B(r+1,q+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(q+r+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§7. 利用三重积分计算体积

区域的体积 V 可表示为以下公式： $V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$

求以下列曲面为界的物体的体积：

【4101】 $z=x^2+y^2$，$z=2x^2+2y^2$，$y=x$，$y=x^2$.

解 区域 V 为 $0\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant x$，$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2$，

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)dy=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{3}{35}.$$

【4102】 $z=x+y$，$z=xy$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

解 区域 V 为 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$，$xy\leqslant z\leqslant x+y$ *），

故体积为 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_{xy}^{x+y}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dy=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{2}\right]dx=\frac{7}{24}.$

*） 因为 $0\leqslant y\leqslant 1$，故有 $xy\leqslant z\leqslant x+y$.

【4103】 $x^2+z^2=a^2$，$x+y=\pm a$，$x-y=\pm a$.

解 $V=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz=8\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=8a\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a+\frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{2a^3}{3}(3\pi-4).$$

【4104】 $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

解 对区域 V 在 Oxy 平面上的投影作极坐标变换

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

则区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant a,\quad \frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且有 $|I|=r$. 于是,体积为

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{6}.$$

【4105】 $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.

解 由 $az=a^2-x^2-y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 为界的物体体积为

$$V_1=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}r\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{8}.$$

由 $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 为界的物体体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{a-x-y}\mathrm{d}z=\frac{a^3}{6}.$$

于是,所求的体积为 $V=V_1-V_2=\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$.

【4106】 $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

提示 利用圆柱坐标,则区域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 2$, $r\leqslant z\leqslant 6-r^2$.

解 引用圆柱坐标,则区域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 2$, $r\leqslant z\leqslant 6-r^2$.

于是,体积为
$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2(6r-r^3-r^2)\mathrm{d}r=\frac{32\pi}{3}.$$

变换为球坐标或圆柱坐标,计算以下曲面所围的体积:

【4107】 $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

解题思路 变换为圆柱坐标,则有

$$r^2+z^2=2az\quad 及\quad r^2\leqslant z^2,$$

且区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2},$$

这里要注意,球面方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$,但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的上半部,故取 $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

解 变换为圆柱坐标,则有 $r^2+z^2=2az$ 及 $r^2\leqslant z^2$.

因而区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}\ {}^{*)}.$$

于是,体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)\mathrm{d}r=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

*) 球面的方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$,但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的上半部,故取 $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

【4108】 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

提示 变换为球坐标,则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

解 变换为球坐标，则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos2\psi}.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\psi\int_0^{a\sqrt{\cos2\psi}}r^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\psi(\cos2\psi)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\psi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(\sin\psi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t^{*)}=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

*） 作代换 $\sqrt{2}x=\sin t$.

【4109】 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体在第一，第三，第六及第八卦限内，对于这些卦限分别有：

$$x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0;\quad x\leqslant0,\ y\leqslant0,\ z\geqslant0;\quad x\leqslant0,\ y\geqslant0,\ z\leqslant0;\quad x\geqslant0,\ y\leqslant0,\ z\leqslant0.$$

立体在这四个卦限内的各部分，一对一对地对称于坐标轴之一. 这是因为左端及右端当 x,y,z 中的任何两个同时变号时等号不变.

变换为球坐标，计算得体积

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

【4110】 $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ x^2+y^2=z^2\ (z\geqslant0)(0<a<b)$.

提示 变换为球坐标，则区域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ a\leqslant r\leqslant b$.

解 变换为球坐标，得区域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\quad a\leqslant r\leqslant b$.

于是，体积为 $V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_a^b r^2\cos\psi\mathrm{d}r=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_a^b r^2\mathrm{d}r\right)=\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}$.

在下列各题中最好利用广义球坐标 r,φ,ψ（$r\geqslant0$；$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$；$-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$），它们由以下公式引入：

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\quad y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\quad z=cr\sin^\beta\psi\quad (a,b,c,\alpha,\beta\text{ 为常数}),$$

并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积：

【4111】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi$，则区域的 $\frac{1}{4}$ 部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是，体积为 $V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi\right)=\frac{\pi a^2bc}{3h}$.

【4112】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi$，并利用对称性，即得体积

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\cos\psi}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi\mathrm{d}\psi=\frac{4\pi abc}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}abc.$$

【4113】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$

解 令 $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi,\ z=z$,则 r 满足方程 $r^4+r^2-1=0$.解得 $r=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.于是,体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}abr\mathrm{d}r\int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi abc\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}r(\sqrt{1-r^2}-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.$$

【4114】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1.$

解 令 $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi,\ z=z$,则得体积

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\mathrm{d}r\int_{-c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}z=4\pi abc\int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}r=4\pi abc\left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{8}{5}\pi abc.$$

【4115】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi,\ y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi,\ z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$,则有 $|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$,且 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限内)为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant1$,并利用 3856 题的结果及延拓公式.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi,y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi,z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$,则有 $|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 区域 V(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant1.$$

于是,体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}\psi=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}\pi abc\,\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}\pi abc\,\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi}^{**)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用延拓公式:$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换,计算以下列曲面为界的物体的体积(假定参数是正的):

【4116】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}(x>0,y>0,z>0).$

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,\quad y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi,\quad z=cr\sin^2\psi$,则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,且区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi,$$

并利用 3856 题的结果.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi,z=cr\sin^2\psi$,则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,且区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi.$$

于是,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^5\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\frac{a^3}{8h^3}+\frac{b^3}{8k^3}+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\cdot\frac{1}{24}+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\cdot\frac{1}{24}\right)^{*)}=\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4117】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x>0,y>0,z>0)$.

提示 仿 4116 题的解法.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$, $z=cr\sin^2\psi$,则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,且区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi.$$

于是,体积为

$$V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi}r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{15}\psi\sin^7\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{4}{3}abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(8)\Gamma(4)}{\Gamma(12)}^{*)}=\frac{1}{3}abc\frac{3!\ 3!}{7!}\cdot\frac{7!\ 3!}{11!}=\frac{abc}{554400}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4118】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x>0,y>0,z>0)$.

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos^2\varphi\cos\psi$, $y=br\sin^2\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,
则有 $|I|=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$,且区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos\psi$, $y=br\sin^2\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,则有 $|I|=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$,且区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是,体积为

$$V=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi=\frac{1}{3}abc.$$

【4119】 $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,y>0)$.

解题思路 作变量代换 $z=u(x^2+y^2)$, $xy=v$, $x=yw$,则

$$x=\sqrt{vw},\ y=\sqrt{\frac{v}{w}},\ z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right)\quad 及\quad |I|=\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2},$$

且区域 V 为 $1\leqslant u\leqslant 2$, $a^2\leqslant v\leqslant 2a^2$, $\frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2$.

解 令 $z=u(x^2+y^2)$, $xy=v$, $x=yw$,则

$$x=\sqrt{vw},\quad y=\sqrt{\frac{v}{w}},\quad z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅可比行列式为

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而区域 V 为 $$1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\quad \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是,体积为

$$V=\int_1^2 \mathrm{d}u\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}v\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)\mathrm{d}w=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{w^2}\right)\mathrm{d}w=\frac{9a^4}{4}.$$

【4120】$^+$ $x^2+z^2=a^2, x^2+z^2=b^2, x^2-y^2-z^2=0\ (x>0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi,\ y=y, z=r\sin\varphi$,则区域 V 为

$$a\leqslant r\leqslant b,\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad -r\sqrt{\cos2\varphi}\leqslant y\leqslant r\sqrt{\cos2\varphi}.$$

于是,体积为

$$V=\int_a^b r\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{-r\sqrt{\cos2\varphi}}^{r\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos2\varphi}\ \mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}\ \mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}^{*)}=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)^{**)}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用延拓公式有 $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\sqrt{2}\pi$.

【4121】 $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

解 采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,\ z=r\sin\psi$,则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant a\tan^{\frac{1}{3}}\psi.$$

于是,体积为 $V=8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{a\tan^{\frac{1}{3}}\psi}r^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\mathrm{d}\psi=\frac{4\pi a^3}{3}$.

【4122】 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi$,则区域 V 的 $\frac{1}{4}$ 部分(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于 $z\geqslant 0$,故区域 V 在 Oxy 平面的上方.

于是,体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4c^2ab}{3h}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi e^{-\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi$$

$$=-\frac{\pi abc^2}{3h}e^{-\sin^2\psi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1}).$$

【4123】 $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $x=0$, $x=a$.

解题思路 作变量代换 $\dfrac{x}{a}=u$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=v$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=w$,

则有 $|I|=abc$ $\left(\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\dfrac{1}{abc}\right)$,且区域 V 为 $0\leqslant u\leqslant 1$, $-1\leqslant w\leqslant 1$, $\dfrac{2}{\pi}w\arcsin w\leqslant v\leqslant 1$.

解 令 $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $w=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$,则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & 0\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{abc},$$

且区域 V 变为 $\qquad 0\leqslant u\leqslant 1,\quad \dfrac{2}{\pi}w\arcsin w\leqslant v\leqslant 1,\quad -1\leqslant w\leqslant 1.$

于是,$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$,且体积为

$$V=abc\int_0^1 du\int_{-1}^1 dw\int_{\frac{2}{\pi}w\arcsin w}^1 dv=2abc\int_0^1\left[1-\frac{2}{\pi}w\arcsin w\right]dw=2abc-\frac{2abc}{\pi}\int_0^1\arcsin w\,d(w^2)$$

$$=abc+\frac{2abc}{\pi}\int_0^1 w^2(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw=abc+\frac{abc}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=abc+\frac{abc}{\pi}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}abc.$$

【4124】 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\ln\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

提示 仿 4123 题的解法.

解 令 $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $w=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$,则 $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\dfrac{1}{abc}$,

且区域 V 变为

$$0\leqslant u\leqslant w,\quad we^{-w}\leqslant v\leqslant w,\quad 0\leqslant w\leqslant 1.$$

于是,$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$,且体积为

$$V=abc\int_0^1 dw\int_0^w du\int_{we^{-w}}^w dv=abc\int_0^1(w^2-w^2e^{-w})dw=abc\left(\frac{1}{3}-2+5e^{-1}\right)=5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right).$$

【4125】 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球 $x^2+y^2+z^2=4az$ 分成两部分,求这两部分的体积之比.

解 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 与球面 $x^2+y^2+(z-2a)^2=4a^2$ 的交线为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=3a^2\\ z=a,\end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0,0,4a)$.球内位于曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 下方部分的体积为

$$V_1=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4az-z^2}dxdy+\int_a^{4a}dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4a^2-az}dxdy=\int_0^a\pi(4az-z^2)dz+\int_a^{4a}\pi(4a^2-az)dz$$

$$=2\pi a^3-\frac{1}{3}\pi a^3+12\pi a^3-\frac{15}{2}\pi a^3=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

从而,另一部分的体积 $\qquad V_2=\dfrac{4}{3}\pi(2a)^3-\dfrac{37}{6}\pi a^3=\dfrac{27}{6}\pi a^3.$

于是,球被曲面所分的两部分体积之比为 $\qquad \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{37}{27}.$

【4126】 求以曲面 $x^2+y^2=az$，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$为界的物体的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周
$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=a,\end{cases}$$
又曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点为$(0,0,2a)$. 于是，体积为
$$V=\int_0^a \mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a \pi az\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2a-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi a^3}{2}+\frac{\pi a^3}{3}=\frac{5\pi a^3}{6}.$$
由两曲面方程分别可得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{a},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}.$$
于是，曲面的表面积为
$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,a^2r\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2$$
$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

【4127】 求以平面 $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$，$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$，$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$，为界的平行六面体的体积，设
$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

解题思路 作变量代换
$$a_1x+b_1y+c_1z=u,\quad a_2x+b_2y+c_2z=v,\quad a_3x+b_3y+c_3z=w,$$
则有 $|I|=\frac{1}{|\Delta|}$，且区域 V 为 $-h_1\leqslant u\leqslant h_1$，$-h_2\leqslant v\leqslant h_2$，$-h_3\leqslant w\leqslant h_3$.

解 令 $a_1x+b_1y+c_1z=u$，$a_2x+b_2y+c_2z=v$，$a_3x+b_3y+c_3z=w$，
则有$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\Delta}$，且体积为
$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}v\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}w=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

【4128】 求以曲面 $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$ 为界的物体的体积，设
$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

提示 仿 4127 题的解法.

解 令 $a_1x+b_1y+c_1z=u$，$a_2x+b_2y+c_2z=v$，$a_3x+b_3y+c_3z=w$，
则有$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\Delta}$，且体积为
$$V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant h^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

【4129】 求以曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$ $(n>1)$
为界的物体的体积.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$，且区域 V 的$\frac{1}{4}$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}.$$

于是,体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}}abcr^2\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi\cos^{2n-3}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-3}\mathrm{d}t}{t^{2n}+(1-t^2)^n}=-\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-4}\mathrm{d}(1-t^2)}{t^{2n}+(1-t^2)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x}{(1-x)^n+x^n}=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}{}^{*)}=\frac{1}{3h}\pi abc^2\,\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}{}^{**)}=\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\,\frac{abc^2}{h}.$$

*) 作代换 $t=\frac{x}{1-x}$.

*) 利用 3851 题的结果.

【4130】 一物体位于正卦限 $Oxyz$ ($x>0,y>0,z>0$),并以曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1\quad(m>0,n>0,p>0),x=0,y=0,z=0$$

为界,求其体积.

提示 作变量代换 $x=ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi$, $y=br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi$, $z=cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi$,则有

$$I=\frac{8abc}{mnp}r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi.$$

解 令

$$x=ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi,\quad y=br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\quad z=cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi,$$

则

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\frac{8abc}{mnp}r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi.$$

于是,体积为

$$V=\frac{8abc}{mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi\mathrm{d}\psi\cdot\int_0^1 r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}}{}^{*)}$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}\frac{mnp}{2(mn+np+mp)}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

§8. 三重积分在力学上的应用

1° **物体的质量** 若一物体占有区域 V，$\rho=\rho(x,y,z)$ 为它在点 (x,y,z) 的密度，则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1}$$

2° **物体的质心** 物体的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 按下列公式来计算

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ y_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ z_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{2}$$

若物体是均匀的，则在公式(1)和(2)中可令 $\rho=1$.

3° **转动惯量** 积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(其中 r 为物体各点 (x,y,z) 与轴 l 的距离)称为物体对于某轴 l 的转动惯量. 特别是，对于坐标轴 Ox，Oy，Oz 分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yz}+I_{yx},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

显然有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4° **引力势** 积分

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}$$

称为物体在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势. 式中 V 为物体所占区域，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度，且

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的投影 X，Y，Z 分别等于

$$X=cm\frac{\partial u}{\partial x}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\quad Y=cm\frac{\partial u}{\partial y}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\eta-y}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\quad Z=cm\frac{\partial u}{\partial z}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\zeta-z}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 c 为引力常量.

【4131】 设物体在点 $M(x,y,z)$ 的密度由公式 $\rho=x+y+z$ 给出，求占有单位体积 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示，则按题设有 $M=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z=\dfrac{3}{2}$.

【4132】 若物体的密度按规律 $\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数)而变化，求占有无限区域 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则质量为

$$M=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}r^2\rho_0\mathrm{e}^{-kr}\cos\psi\mathrm{d}r=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-kr}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{d}e^{-kr}=-\frac{4\pi\rho_0}{k}r^2e^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}2re^{-kr}\mathrm{d}r=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}r\mathrm{d}e^{-kr}$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}re^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}e^{-kr}\mathrm{d}r=4\pi\rho_0e^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$$

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标：

【4133】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$， $z=c$.

提示 作变量代换 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，$z=z$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，$z=z$，则质量为

$$M=ab\int_0^c\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}r\mathrm{d}r=\frac{\pi abc}{3}.$$

设质心坐标为 x_0,y_0,z_0，由对称性知 $x_0=y_0=0$，而

$$z_0=\frac{ab}{M}\int_0^c z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}r\mathrm{d}r=\frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{\pi abc^2}{4}=\frac{3c}{4}.$$

于是，质心为点 $\left(0,0,\frac{3c}{4}\right)$.

【4134】 $z=x^2+y^2$，$x+y=a$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 物体的质量为 $$M=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}a^4.$$

质心的横坐标为 $$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{1}{M}\int_0^a\left(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.$$

于是，质心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

【4135】 $x^2=2pz$，$y^2=2px$，$x=\frac{p}{2}$，$z=0$.

解 物体的质量为 $$M=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{x^2}{2p}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\frac{p}{2}}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{p^3}{28}.$$

质心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{x^2}{2p}}\mathrm{d}z=\frac{p^4}{72}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{18}p.\qquad y_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y\int_0^{\frac{x^2}{2p}}\mathrm{d}z=0.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{x^2}{2p}}z\mathrm{d}z=\frac{p^4}{704}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{176}p.$$

【4136】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$.

提示 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，并利用对称性.

解 若令 $$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=cr\sin\psi,$$

则质量为 $$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi abc.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\cdot ar\cos\varphi\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1 a^2bcr^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{16}\pi a^2bc\cdot\frac{6}{\pi abc}=\frac{3}{8}a.$$

利用对称性知,质心的坐标为 $x_0=\frac{3}{8}a, y_0=\frac{3}{8}b, z_0=\frac{3}{8}c$.

【4137】 $x^2+z^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2\ (z>0)$.

解 物体的质量为 $M=\int_0^a \mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^a(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8a^3}{3}$.

于是,
$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a \mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}x\mathrm{d}x=0.$$

同理可得 $y_0=0$,而
$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$

于是,质心的坐标为 $x_0=y_0=0,\ z_0=\frac{3}{8}a$.

【4138】 $x^2+y^2=2z,\ x+y=z$.

解 由 $x^2+y^2=2z,\ x+y=z$ 所围成的区域在平面$z=0$上的投影为圆$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

若引用代换
$$x=1+r\cos\theta,\ y=1+r\sin\theta,$$

则质量为
$$M=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r=\pi.$$

于是,
$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}(1+r\cos\theta)\mathrm{d}z=\frac{1}{M}\left[\pi+\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\left(1-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r\right]=\frac{\pi}{M}=1.$$

同理可得 $y_0=1$,而
$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[3+(\sin\theta+\cos\theta)(2r-r^3)-\frac{1}{4}r^4-r^2\right]r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\pi}{3}=\frac{5}{3}.$$

于是,质心的坐标为 $x_0=y_0=1,\ z_0=\frac{5}{3}$.

【4139】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}\ (x>0,y>0,z>0)$.

解 作代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,z=cr\sin\psi$,则物体的质量为
$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{1}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\psi\sin^3\psi\mathrm{d}\psi$$
$$=\frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(2,2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(4,2)=\frac{1}{12}abc\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}=\frac{abc}{1440}.$$

于是,
$$x_0=\frac{1}{M}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}r^3\cos^2\psi\cos\varphi\mathrm{d}r=\frac{a^2bc}{4M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\psi\sin^4\psi\mathrm{d}\psi$$
$$=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(3,\frac{5}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)}$$
$$=\frac{18a^2bc\pi}{16\cdot16\cdot7!}\cdot\frac{1440}{abc}=\frac{9\pi}{448}a.$$

由对称性知,质心的坐标为 $x_0=\frac{9\pi}{448}a,\quad y_0=\frac{9\pi}{448}b,\quad z_0=\frac{9\pi}{448}c$.

【4140】 $z=x^2+y^2, z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), x+y=\pm1, x-y=\pm1$.

解 作代换:$x-y=u,\ x+y=v$,则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{v-u}{2},\quad z=\frac{u^2+v^2}{4}\quad 及\quad z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$ 及区域 V 为：$-1\leqslant u\leqslant 1,-1\leqslant v\leqslant 1,\frac{u^2+v^2}{4}\leqslant z\leqslant\frac{u^2+v^2}{2}$. 于是，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}\mathrm{d}z=\frac{1}{3}.$$

$$x_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(u+v)\mathrm{d}z=0,$$

$$y_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(v-u)\mathrm{d}z=0,$$

$$z_0=\frac{1}{2M}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}z\mathrm{d}z=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{M}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{3}{64M}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4u^2}{3}+\frac{2}{5}\right)\mathrm{d}u=\frac{7}{20},$$

于是，质心的坐标为 $x_0=y_0=0,\ z_0=\frac{7}{20}$.

【4141】 $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1,x=0,y=0,z=0\ (n>0,x>0,y>0,z>0)$.

解 作代换 $x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\ y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,z=cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi$,

则有 $|I|=\frac{4}{n^2}abcr^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi$. 于是，

$$M=\frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{n^2}abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

于是，质心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\frac{4}{n^2}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{6}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{3n^2}{abc}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}a,$$

同理可求得

$$y_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}b,\qquad z_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}c.$$

【4142】 求形状为立方体 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$ 的物体的质心坐标，设此物体在点 (x,y,z) 的密度等于

$$\rho=x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0<\alpha<1,0<\beta<1,0<\gamma<1$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\mathrm{d}x\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\mathrm{d}y\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}\mathrm{d}z=\frac{1-\alpha}{\alpha}x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\Big|_0^1\cdot\frac{1-\beta}{\beta}y^{\frac{\beta}{1-\beta}}\Big|_0^1\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是,质心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}-1}\mathrm{d}x\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\mathrm{d}y\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}\mathrm{d}z=\frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}(1-\alpha)\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma}=\alpha.$$

同理可求得 $y_0=\beta$, $z_0=\gamma$.

求以下列曲面(参变量是正的)为界的均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

【4143】 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0, y=0, z=0.$

解 $I_{xy}=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\mathrm{d}y\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})}z^2\mathrm{d}z=\frac{c^3}{3}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\mathrm{d}y$

$$=-\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4\Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})}\mathrm{d}x=\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\mathrm{d}x=\frac{abc^3}{60}.$$

利用对称性可得 $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$, $I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$.

【4144】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

提示 作代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,并利用对称性.

解 若令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,则有

$$I_{xy}=abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}r=\frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi=\frac{abc^3}{15}2\pi\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

利用对称性可得 $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$, $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$.

【4145】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则有

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\mathrm{d}r\int_{cr}^c z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{5}\pi abc^3,$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\mathrm{d}r\int_{cr}^c(ar\cos\varphi)^2\mathrm{d}z=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r)r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{20}\pi a^3bc.$$

利用对称性可得 $I_{zx}=\frac{1}{20}\pi ab^3c$.

【4146】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$,则得区域 V 为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,\quad -c\sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2}.$$

于是,

$$I_{xy}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}z^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{15}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-(\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}]\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{15}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{15}abc^3\left(\varphi+\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos^3\varphi+\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16).$$

$$I_{yz}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(ar\cos\varphi)^2\mathrm{d}z=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\ r^3\mathrm{d}r$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\left\{\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\varphi=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t\right\}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0}\sin^2t\cos^3t\mathrm{d}t\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{0}\sin^2t\cos^3t\mathrm{d}t\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$=2a^3bc\left(\frac{\pi}{15}-\frac{92}{1575}\right)=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92),$$

$$I_{zx}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(br\sin\varphi)^2\mathrm{d}z=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\ r^3\sin^2\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3t\mathrm{d}t\right\}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2ab^3c\left\{\frac{\pi}{15}+\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$=2ab^3c\left(\frac{\pi}{15}-\frac{272}{1575}\right)=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

【4147】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$，即$\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=2$. 若令

$$\frac{x}{a}=1+r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=1+r\sin\varphi,$$

则得区域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\quad c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\leqslant z\leqslant c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)].$$

于是，

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abr\mathrm{d}r\int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\Big[8+12r(\cos\varphi+\sin\varphi)+6r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2$$

$$-\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^3-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^2r(\cos\varphi+\sin\varphi)-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\Big]\mathrm{d}r=\frac{7}{2}\pi abc^3.$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}a^3br(1+r\cos\varphi)^2\mathrm{d}r\int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}\mathrm{d}z=a^3bc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1+2r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3bc.$$

利用对称性得 $I_{zx}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$.

求以下列曲面为界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量：

【4148】 $z=x^2+y^2$，$x+y=\pm1$，$x-y=\pm1$，$z=0$.

提示 注意 $I_z=I_{zx}+I_{zy}$，并令 $x+y=u$，$x-y=v$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记作 I_z，则 $I_z=I_{zx}+I_{zy}$.

若令 $x+y=u$，$x-y=v$，则有 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，$z=\frac{u^2+v^2}{2}$，且$|I|=\frac{1}{2}$. 于是，

$$I_z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_0^{\frac{u^2-v^2}{2}}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2+\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right\}\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\frac{(u^2+v^2)^2}{8}\mathrm{d}v=\frac{14}{45}.$$

【4149】 $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z^2\quad(z>0)$.

解 若令 $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$,则有 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant1,\ r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2}$.

于是, $I_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^3\sqrt{2-r^2}-r^4)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}\varphi^{*)}$

$=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

*) 作代换 $r=\sqrt{2}\sin t$.

【4150】 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对于其直径的转动惯量.设球内各点 $P(x,y,z)$ 的密度与该点至球心距离成正比.

解 不失一般性,取 Oz 轴在球内的一段作为直径.若令

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi,$$

则质量为
$$M=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^R r^2\cos\psi\cdot kr\mathrm{d}r=k\pi R^4,$$

由此得 $k=\frac{M}{\pi R^4}$.从而,密度 $\rho=\frac{Mr}{\pi R^4}$.于是,所求的转动惯量为

$$I_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^R r^2\cos^2\psi\cdot\frac{Mr^3}{\pi R^4}\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{2M}{R^4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^R r^5\mathrm{d}r\right)=\frac{4MR^2}{9}.$$

【4151】 证明等式: $$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$
其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量,I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量,d 为此二轴之间的距离及 M 为物体的质量.

证 取质心为坐标原点 O,z 轴与 l_0 重合,l 与 Oxy 平面的交点为 $(\zeta,\eta,0)$,如图 8.59 所示,则

$$I_l=\iiint_V[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2]\rho\mathrm{d}v$$
$$=\iiint_V(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}v+(\zeta^2+\eta^2)\iiint_V\rho\mathrm{d}v-2\zeta\iiint_V x\rho\mathrm{d}v-2\eta\iiint_V y\rho\mathrm{d}v\quad(1)$$

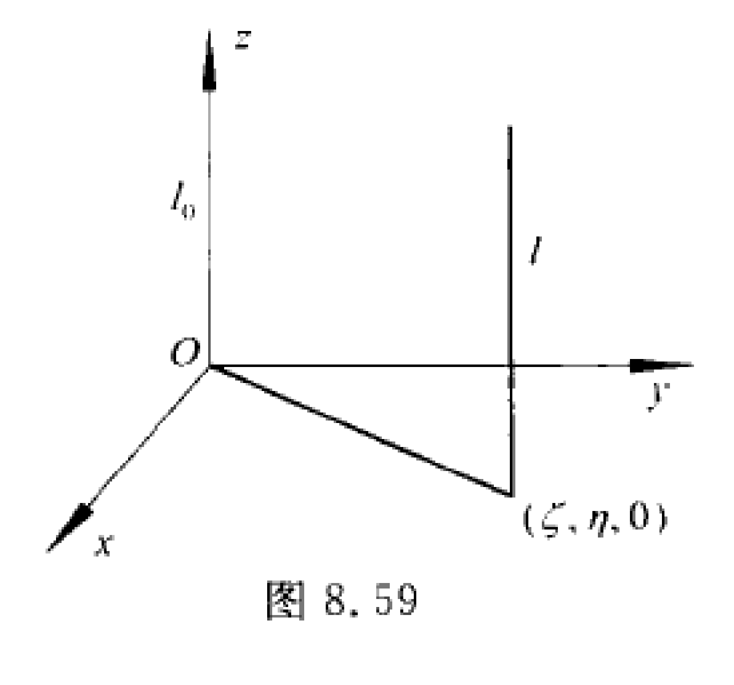


图 8.59

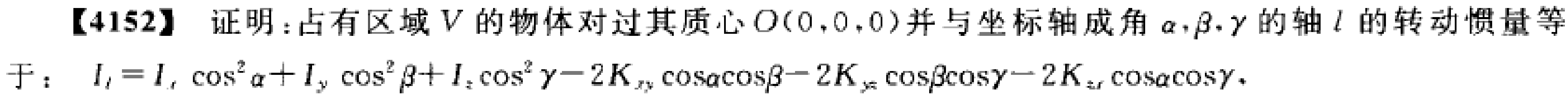
由于质心在原点,故 $x_0=y_0=0$,即

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho\mathrm{d}v=0\quad 及\quad y_0=\frac{1}{M}\iiint_V y\rho\mathrm{d}v=0,$$

并且 $M=\iiint_V\rho\mathrm{d}v$,$d^2=\zeta^2+\eta^2$,代入(1)式,最后得

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

【4152】 证明:占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α,β,γ 的轴 l 的转动惯量等于:



$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$.

其中 I_x,I_y,I_z 为物体对坐标轴的转动惯量,而

$$K_{xy}=\iiint_V\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{xz}=\iiint_V\rho xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{yz}=\iiint_V\rho yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为惯性积.

证 如图 8.60 所示.距离

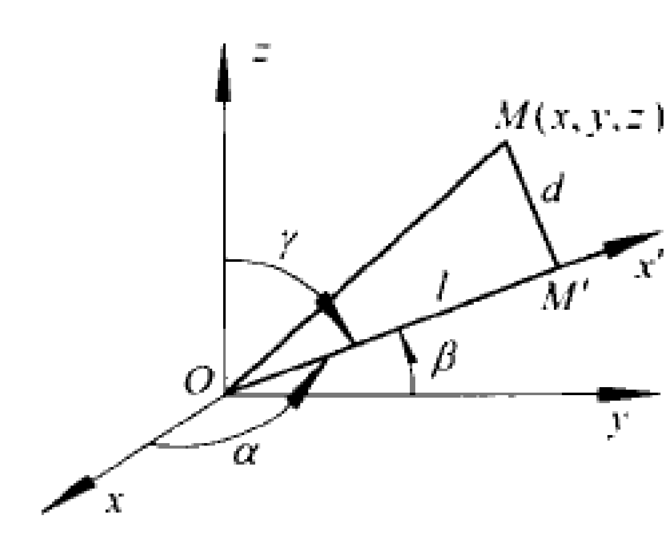


图 8.60

$$d=\frac{|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM'}|}$$
$$=\frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix}y&z\\ r\cos\beta&r\cos\gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z&x\\ r\cos\gamma&r\cos\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x&y\\ r\cos\alpha&r\cos\beta\end{vmatrix}^2}$$

其中 $r=|\overrightarrow{OM'}|$. 由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,故有

$$d^2=(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(z^2+x^2)\cos^2\beta-2xy\cos\alpha\cos\beta-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma.$$

于是,

$$\begin{aligned}I_l&=\iiint\limits_V \rho d^2\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\cos^2\gamma\iiint\limits_V\rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos^2\alpha\iiint\limits_V\rho\cdot(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos^2\beta\iiint\limits_V\rho\cdot(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_V\rho xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_V\rho yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint\limits_V\rho xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.\end{aligned}$$

证毕.

【4153】 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $-h\leqslant z\leqslant h$ 对直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

提示 利用 4152 题的结果.

解 直线 $x=y=z$ 通过圆柱体的质心 $O(0,0,0)$ 且具有方向余弦 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt3}$. 若取极坐标,

则有 $$I_x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0(r^2\sin^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z=\left(\frac12\pi a^4h+\frac23\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$

$$I_y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0(r^2\cos^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z=\left(\frac12\pi a^4h+\frac23\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$

$$I_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0r^2\mathrm{d}z=\pi ha^4\rho_0,\qquad K_{xy}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0r^2\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}z=0,$$

$$K_{yz}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0r\sin\varphi z\mathrm{d}z=0,\qquad K_{zx}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h\rho_0r\cos\varphi z\mathrm{d}z=0,$$

于是,利用 4152 题结果即得

$$\begin{aligned}I_l&=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma\\&=\frac{\rho_0}{3}\left(\frac12\pi a^4h+\frac23\pi a^2h^3+\frac12\pi a^4h+\frac23\pi a^2h^3+\pi a^4h\right)=\frac23\pi\rho_0a^2h\left(a^2+\frac23h^2\right)=\frac M3\left(a^2+\frac23h^2\right),\end{aligned}$$

其中 $M=2\pi\rho_0a^2h$ 为圆柱体的质量.

【4154】 求密度为 ρ_0,以曲面 $$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$$ 为界的均匀物体对坐标原点的转动惯量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,则对坐标原点的转动惯量为

$$I_0=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{a\cos\psi}\rho_0\cdot r^2\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\psi\mathrm{d}\psi=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\cdot\frac{5\pi}{32}{}^{*)}=\frac{\pi^2a^5\rho_0}{8}.$$

*) 利用 2282 题的结果.

【4155】 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点(x,y,z)的牛顿引力势.

提示 取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$,即易获解.

解 由对称性显然可知,所求的牛顿引力势与 ξ,η,ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$,即得牛顿引力势

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}}=\rho_0\int_{-R}^R\mathrm{d}\zeta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 积分之,得

$$u(x,y,z)=2\pi\rho_0\int_{-R}^R(\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}-|\zeta-r|)\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $$\int_{-R}^R\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{3r}[(R+r)^3-|R-r|^3]=\begin{cases}\dfrac23R^3\dfrac1r+2rR, & r>R,\\[2mm] \dfrac23r^2+2R^2, & r\leqslant R,\end{cases}$$

及
$$\int_{-R}^{R}|\zeta-r|\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}2Rr, & r>R,\\ r^2+R^2, & r\leqslant R.\end{cases}$$

因而，最后得
$$u(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{4}{3r}\pi R^3\rho_0, & r>R,\\ 2\pi\rho_0\left(R^2-\dfrac{1}{3}r^2\right), & r\leqslant R.\end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论：

(1)在球外一点上的牛顿引力势，与将球的全部质量集中在它的中心处时一样；

(2)如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球，则它在位于其空隙处的一点($r<R$)上的牛顿引力势可表示成差
$$u(x,y,z)=u_2(x,y,z)-u_1(x,y,z)=\left(R_2^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0-\left(R_1^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0=2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0.$$
它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的引力势保持一个常数值.

【4156】 求球壳层 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势. 设密度 $\rho=f(R)$，其中 f 为已知函数，而 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

提示 仿 4155 题.

解 取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿引力势
$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2}f(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$
其中 $r=x^2+y^2+z^2$.

若引入球坐标，即得
$$u(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2f(\rho)\cos\psi\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2f(\rho)\frac{\cos\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}$$
$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2f(\rho)\left(-\frac{1}{\rho r}\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\rho=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2f(\rho)\left\{-\frac{1}{\rho r}[|\rho-r|-(\rho+r)]\right\}\mathrm{d}\rho$$
$$=\begin{cases}4\pi\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho, & \rho>r,\\ 4\pi\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{r}f(\rho)\mathrm{d}\rho, & \rho\leqslant r.\end{cases}$$

合并之，最后得
$$u(x,y,z)=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\rho\right)\mathrm{d}\rho.$$

【4157】 求密度 ρ_0 恒定的圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2,0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,0,z)$ 的牛顿引力势.

解 若引用柱坐标，即得
$$u(x,y,z)=\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\mathrm{d}\zeta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}}=2\pi\rho_0\int_0^h\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}\Bigg|_0^a\mathrm{d}\zeta$$
$$=2\pi\rho_0\int_0^h[\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}-|\zeta-z|]\mathrm{d}\zeta$$
$$=2\pi\rho_0\left[\frac{\zeta-z}{2}\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}+\frac{a^2}{2}\ln|(\zeta-z)|+\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}-\frac{(\zeta-z)|\zeta-z|}{2}\right]\Bigg|_0^h$$
$$=\pi\rho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)|h-z|+z|z|]+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{-z+\sqrt{a^2+z^2}}\right|\right\}.$$

【4158】 半径为 R 质量为 M 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0,0,a)$?

解 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零，即 $X=Y=0$，而在 Oz 轴上的投影为
$$Z=k\rho_0m\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{(\zeta-a)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-\zeta^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\left(\frac{1}{|\zeta-a|}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}\right)\mathrm{d}\zeta$$

$$=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta-2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}},$$

其中 $\rho_0=\frac{3M}{4\pi R^3}$.

分别求上述两个积分：

当 $a\geqslant R$ 时， $\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta=-\int_{-R}^{R}\mathrm{d}\zeta=-2R$，

当 $a<R$ 时， $\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta=-\int_{-R}^{a}\mathrm{d}\zeta+\int_{a}^{R}\mathrm{d}\zeta=-2a$；

而

$$\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{R^2+a^2-2a\zeta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}\mathrm{d}\zeta-a\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,\mathrm{d}\zeta+\left(\frac{R^2+a^2}{2a}-a\right)\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{R^2-a^2}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}.$$

当 $a\geqslant R$ 时，将上式右端分别积分，得结果：

$$\left[\frac{1}{4a^2}(R^2+a^2-2a\zeta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{R^2-a^2}{2a}\left(-\frac{1}{2a}\right)\cdot 2\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\right]\Bigg|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{1}{6a^2}[(a-R)^3-(a+R)^3]-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(a-R)-(a+R)]=\frac{2R^3}{3a^2}-2R;$$

当 $a<R$ 时，积分得结果：

$$\frac{1}{6a^2}[(R-a)^3-(a+R)^3]-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(R-a)-(R+a)]=-\frac{4a}{3}.$$

于是，当 $a\geqslant R$ 时，则 $Z=2\pi km\rho_0\left(-2R-\frac{2R^3}{3a^2}+2R\right)=-\frac{4}{3a^2}\pi km\rho_0R^3=-\frac{kMm}{a^2}$；

当 $a<R$ 时，则 $Z=2\pi km\rho_0\left(-2a+\frac{4a}{3}\right)=-\frac{4}{3}\pi akm\rho_0=-\frac{kMm}{R^3}a.$

从以上结果可以得到下面两个推论：

(1) 位于球外的一点($a\geqslant R$)因球体而受到的引力相当于将球体的全部质量 $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力，引力的方向朝向球心；

(2) 对于在球里面的一点($a<R$)来说，引力与 R 无关，其大小与 $R=a$ 时的情况一样，即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零.

【4159】 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对单位质量质点 $P(0,0,z)$的引力.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零，即 $X=Y=0$. 若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的投影为

$$Z=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]\mathrm{d}r=2\pi k\rho_0\left[\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-|z|+|h-z|\right].$$

易知，

当 $0\leqslant z<\frac{h}{2}$ 时，$Z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当 $\frac{h}{2}<z\leqslant h$ 时，$Z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当 $z=\frac{h}{2}$ 时，$Z=0$，引力为零.

【4160】 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对位于其顶点的单位质量质点的引力，设球面半径为 R，而轴截面的扇形的角等于 2α.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零，即 $X=Y=0$. 若引用球坐标，即得引力在 Oz 轴上的投影为

$$Z=\iiint\limits_V \frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin\psi\mathrm{d}\int_0^R\mathrm{d}r=k\pi R\rho_0\sin^2\alpha.$$

§9. 二重和三重广义积分

1° **无界区域的情形** 若二维区域 Ω 是无界的，函数 $f(x,y)$ 在区域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 Ω_n 是可求积有界封闭区域，并且它们组成 Ω 的任意一个竭尽递增序列*. 若右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关，则相应积分称为*收敛的*；否则称为*发散的*.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2° **不连续函数的情形** 若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭区域 Ω 内除了点 $P(a,b)$ 而外处处是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\Omega\setminus U_\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中 U_ε 是包含点 P 的以 ε 为直径的区域，并且当极限存在时，所研究的积分称为*收敛的*；否则称为*发散的*.

假定在点 $P(a,b)$ 的邻近有等式

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^\alpha},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha<2$ 时，积分(2)收敛；2) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，积分(2)发散.

若函数 $f(x,y)$ 有不连续的线，也可类似地定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分的概念易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$：

【4161】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解题思路 注意到广义重积分收敛必绝对收敛.

由题设知，所给积分与积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的，从而引用极坐标，即可知所给积分当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

解 由于
$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

---

* 区域 Ω 的竭尽递增序列是指这样的序列 Ω_n，对任意正整数 n 有 $\Omega_n\subset\Omega_{n+1}$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n=\Omega$.

与积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的，故引用极坐标，得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}\mathrm{d}r=\begin{cases}\frac{\pi}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知，原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

【4162】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$.

解 由于被积函数是正的，并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+y^q}\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\frac{1}{1+x^p}=1$，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p<1$ 时发散，$p=1$ 时显然也发散 $\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=+\infty\right)$.

因此，
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

同理有
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数}, & q>1,\\ +\infty, & q\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，其他情形均发散.

【4163】 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 仿 4161 题，可知积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 由于被积函数是正的，故

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^p}=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^p};$$

由于，当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}\quad(\text{若 }p\geqslant 0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x^2)^p}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^p}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}\quad(\text{若 }p<0),$$

故
$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}\quad(p\geqslant 0),$$

若 $p<0$，则有相反的不等式.

对于 $a>0$，由于
$$\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\frac{1}{(a^2+x^2)^p}=1,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^p}$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，$p<\frac{1}{2}$ 时发散. 实际上，此积分当 $p=\frac{1}{2}$ 时也发散，因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Big|_0^{+\infty}=+\infty.$$

由此可知：积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}$，从而，积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

【4164】 $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q},$$

其中 $\Omega_1=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\right\}$，$\Omega_2=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\right\}$，令 $\Omega_3=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\right\}$，易知，当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$（因若 $x+y<1$，则必有 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$，从而，$0\leqslant x^p<1,0\leqslant y^q<1$，这就会得出 $x^p+y^q<2$），故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域，故(1)式右端第一个积分为常义积分，因此，广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$ 的敛散性，在此积分中作变量代换 $x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta$，$y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta$，

则易知
$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛，且其值为 $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$（即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$）时收敛，当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant -1$（即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$）时发散.

综上所述，可知广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ 仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ 时收敛.

【4165】 $\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 设此积分收敛，以 I 表其值. 先设 $p<1$. 令

$\Omega_n=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$，

$\Omega_n'=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi-\frac{\pi}{4},-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$，

$\omega_n=\left\{(x,y)\mid 2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$，

其中 $n=1,2,3,\cdots$，则显然有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I,\quad \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\left[\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=I-I=0.\tag{1}$$

由于 $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$，今在(1)式左端的积分中作变量代换 $x+y=u,x-y=v$（即 $x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$），并注意到 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{2}$，得

$$\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\mathrm{d}u\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\mathrm{d}v=-n\pi\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u;$$

而
$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}\geqslant\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(2n\pi)^p}, & p>0,\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & p\leqslant 0.\end{cases}$$

由此可知(注意前面假定 $p<1$)，
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty,$$
此显然与(1)式矛盾.

现设 $p\geqslant 1$. 令
$$\omega_n'=\left\{(x,y)\,\middle|\,2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2\pi n^{-[p]-2}\leqslant x-y\leqslant 2\pi n^{-[p]-2}\right\},$$
仿上，应有
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{2}$$
但另一方面，和上面一样，作代换 $x+y=u,x-y=v$ 后，有
$$\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi n^{-[p]-2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u.$$
同样，由
$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^p},$$
即得
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty,$$
此显然与(2)式矛盾.

综上所述，可知：不论 p 为何值，积分 $\iint\limits_{x-y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 都发散.

【4166】 证明：若连续函数 $f(x,y)$ 不为负及 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 为有界闭区域，并且组成区域 S 的任意一个竭尽递增序列. 则
$$\iint\limits_{S}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭区域的序列 $S_n'(n=1,2,\cdots)$，$S_1'\subset S_2'\subset\cdots\subset S_n'\subset\cdots\subset S$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S'_n=S$ 由于 $f(x,y)$ 在 S 上非负，故积分序列 $\iint\limits_{S_n'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是递增的，从而，极限
$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$
存在(是有限数或是 $+\infty$). 我们要证
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I. \tag{2}$$

先设 I 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$，由(1)式知，存在 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有
$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon. \tag{3}$$
又存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，$S_n\supset S'_N$. 从而，根据 $f(x,y)$ 的非负性以及(3)式，得
$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S_N'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>I-\varepsilon.$$

另一方面，对每个固定的 $n\geqslant n_0$ 又必存在某个充分大的 $k_n(\geqslant N)$ 使 $S'_{k_n}\supset S_n$. 于是，再由(3)式得
$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{S_{k_n}'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon.$$

由此可知，当 $n\geqslant n_0$ 时，恒有 $$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon,$$

故(2)式成立.

次设 $I=+\infty$. 任给 $M>0$，由(1)式知，存在 N_1，使
$$\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M.$$

又存在 n_1，使当 $n\geqslant n_1$ 时，恒有 $S_n\supset S'_{N_1}$，从而，此时有
$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M,$$

故(2)式成立. 证毕.

【4167】 证明：
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

然而
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\quad(n\text{ 为正整数}).$$

证 利用极坐标，我们有
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2\pi n}} r\sin r^2\,\mathrm{d}r=\pi(1-\cos 2n\pi)=0\qquad(n=1,2,\cdots),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

但由对称性，有
$$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant n\\0\leqslant y\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^n\mathrm{d}y\int_0^n(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\mathrm{d}x$$
$$=4\left(\int_0^n\cos y^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x\right)+4\left(\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^n\sin y^2\mathrm{d}y\right)=8\left(\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x\right).$$

根据 3830 题的结果，可知
$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而，得
$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

【4168】 证明：尽管累次积分
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\quad\text{及}\quad\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

收敛，但积分
$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有
$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{2y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}-\int_1^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot\frac{2y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\bigg|_{y=1}^{y\to+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}y}{2y^2(x^2+y^2)}+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\bigg|_{y=1}^{y\to+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{x^2}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2+1},$$

故
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\frac{\pi}{4};$$

同理(利用已算得的结果)

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant x}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

发散即可(因为如果积分(1)收敛,则绝对值积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

必收敛. 从而,在小一点的区域上的积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant x}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

更收敛. 由此可知,积分(2)收敛). 由于

$$I_n=\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant n\\1\leqslant y\leqslant x}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^n\mathrm{d}x\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y,$$

仿上,利用部分积分法,容易算得

$$\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{x^2\mathrm{d}y}{2y^2(x^2+y^2)}+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x},$$

故 $\quad I_n=\int_1^n\left(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\arctan n+\frac{1}{2}\ln n\to+\infty\quad(n\to\infty)$,

由此可知积分(2)发散.

注意,也可用反证法证明积分(1)发散. 假定积分(1)收敛. 于是,积分(3)收敛. 但恒有

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x. \tag{4}$$

故(4)式中两个累次积分都收敛. 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\quad 与\quad\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

都收敛,故知

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4},$$

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

这是不可能的. 证毕.

计算下列积分(参数是正的):

【4169】 $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\x\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}$.

解 由于被积函数非负,故 $\quad I=\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\x\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}$.

而当 $q>1$ 时, $\quad\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}$.

(注意，当 $q\leqslant 1$ 时，此积分发散，从而，$I=+\infty$)；又当 $p>q$ 时，

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty} x^{q-p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意，当 $p\leqslant q$ 时，此积分发散，$I=+\infty$)

综上所述，可知：当 $p>q>1$ 时，$\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$

【4170】 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$

解 由于被积函数非负，故 $\displaystyle I=\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$

当 $p>1$ 时，
$$\int_{1-x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(x+y)^{p-1}}\bigg|_{y=1-x}^{y=+\infty}=\frac{1}{p-1}.$$

(注意，当 $p\leqslant 1$ 时，积分发散，$I=+\infty$)，故

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{p-1}=\frac{1}{p-1}\quad(p>1).$$

【4171】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi(-\sqrt{1-r^2})\Big|_{r=0}^{r=1}=2\pi.$$

【4172】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}.$

提示 ，注意到被积函数非负，采用极坐标即可获解.

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

【4173】 $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

由于 $\displaystyle\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\bigg|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right],$

故

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\bigg|_{x=0}^{x=+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2}{x^3}}{1+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+\dfrac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中
$$\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{-\dfrac{2}{x^3}}{1+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^2}}{1}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{x^4+x^2+\dfrac{1}{2}}\right)=0.$$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$. 为简单计，记 $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，$b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(\sqrt{2}-1)x^2}=\frac{1}{(x^2+b)^2-(ax)^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)}=\frac{1}{2ab}\left[\frac{x+a}{x^2+ax+b}-\frac{x-a}{x^2-ax+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4ab}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}+\frac{a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}+\frac{a}{x^2-ax+b}\right].$$

于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4ab}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}\right]dx+\frac{1}{4b}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{x^2-ax+b}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4ab}\left(\ln\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}+\frac{1}{4b}\left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}+\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$=0+\frac{1}{4b}\frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}=\frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}}=\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2},$$

故
$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

【4174】 $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}e^{-(x+y)}dxdy$.

解 由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}.$$

变换为极坐标，计算下列积分：

【4175】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

提示 注意到被积函数非负，采用极坐标即可获解.

解 由于被积函数非负，故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=+\infty}=\pi.$$

【4176】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$.

提示 由于 $|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)}$，利用 4175 题的结果知所给积分收敛，对它采用极坐标即可获解.

解 由于 $|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)}$，而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

收敛（参看 4175 题），故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$$

收敛. 从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\cos r^2\,dr=\pi\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}\,e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

【4177】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

提示 仿 4176 题的解法.

解 由于 $|e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)}$，而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ 收敛（参看 4175 题），故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 收敛. 从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\sin r^2\,dr=\pi\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{-\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}\,e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

计算下列积分：

【4178】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$，其中 $a<0$，$ac-b^2>0$.

解 我们有（令 $\delta=ac-b^2>0$，$t=x+\frac{b}{a}y$）

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f\\&=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2dx+2ey+f\\&=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f\\&=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\left[y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\right]-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f\\&=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,\end{aligned}$$

其中 $\beta=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)-(ae-bd)^2]$

$$=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},$$

这里

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases}u=\sqrt{-a}\,x+\frac{b\sqrt{-a}}{a}y+\frac{d\sqrt{-a}}{a}\\v=\sqrt{-\frac{\delta}{a}}\,y+\sqrt{-\frac{\delta}{a}}\,\frac{ae-bd}{\delta},\end{cases}\tag{1}$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$. 又

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\sqrt{-a}&\frac{b}{a}\sqrt{-a}\\0&\sqrt{-\frac{\delta}{a}}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0.$$

故线性变换(1)是非退化的，它将 (x,y) 平面的点与 (u,v) 平面的点一一对应. 于是，利用 4175 题的结果，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(x,y)}\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}dudv=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}dudv=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

【4179】 $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy.$

提示 注意到被积函数非负，采用广义极坐标 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$ 即可获解.

解 作广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}abre^{-r^2}dr=2\pi ab\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=1}^{r=+\infty}=\frac{\pi}{e}ab.$$

【4180】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy\ (0<|\varepsilon|<1).$

解 作广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}-2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}a^2b^2r^3\sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}drd\theta. \tag{1}$$

由于 $|r^3\sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}|\leqslant r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}$，而积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{-\infty} r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr=2\pi\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr<+\infty,$$

故(1)式中的二重广义积分收敛. 于是，

$$I=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr. \tag{2}$$

但是，

$$\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt=-\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\left[te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2},$$

故

$$I=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\right]$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}\right]. \tag{3}$$

但是(作代换 $u=\frac{\pi}{2}-v$)，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\sin u}-\frac{1}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right]du=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1+\varepsilon\cos v)^2}\right]dv,$$

同理，有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1-\varepsilon\cos v)^2}\right]dv.$$

根据 2028 题(1)和 2063 题的结果，可知(当 $0<|\varepsilon|<1$ 时)

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C, \tag{4}$$

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C. \tag{5}$$

(注意，2028 题(1)和 2063 题中假定 $0<\varepsilon<1$，但从其推导过程可以看出公式(4)、(5)当 $-1<\varepsilon<0$ 时也成立).

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{(1-\varepsilon\sin u)^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

从而，由(3)式得 $I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right]$.

但对任何的 $x>0$，有
$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故最后得 $I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$.

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$：

【4181】 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，式中区域 Ω 由条件 $|y|\leqslant x^2$；$x^2+y^2\leqslant 1$ 确定.

解 显然，Ω 为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以及被积函数的非负性，采用极坐标就有

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=4\int_0^{\delta}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1\frac{\mathrm{d}r}{r}=4\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta,$$

其中 δ 表图 8.61 中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角，抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

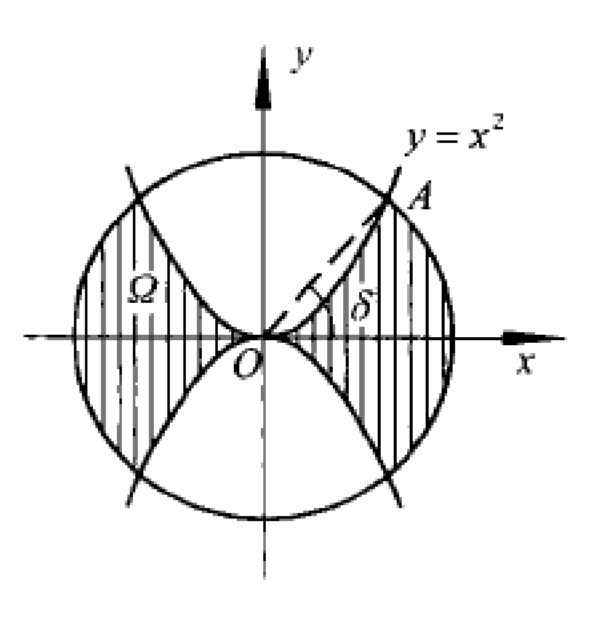


图 8.61


由于

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to+0}\left[\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=0,$$

故积分 $\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 收敛，从而，原积分 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛.

【4182】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于 $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0$ （当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时），

故
$$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p}\quad(\text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{与积分}\quad\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0$（当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时），采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分，其值为有限数，而

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\frac{1}{2(1-p)}, & p<1;\\ +\infty, & p\geqslant 1.\end{cases}$$

由此可知:原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p<1$ 时收敛,当 $p\geqslant 1$ 时发散.

【4183】 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q},\tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2^{-p-q}\right\}$,$\Omega_2=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\right\}$. 令 $\Omega_3=\left\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\right\}$,易知,当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}$时,必有 $x+y\leqslant 1$ (因为 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant\dfrac{1}{2^{p+q}}$,故 $x^p\leqslant\dfrac{1}{2^{p+q}}\leqslant\dfrac{1}{2^p}$,$y^q\leqslant\dfrac{1}{2^{p+q}}\leqslant\dfrac{1}{2^q}$,从而,$x\leqslant\dfrac{1}{2}$,$y\leqslant\dfrac{1}{2}$,由此知 $x+y\leqslant 1$). 故 $\Omega_3=\Omega_2$. 由于函数$\dfrac{1}{x^p+y^q}$在有界闭区域 Ω_1 上连续,故(1)式右端第一个积分为常义积分. 因此,广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$ 的敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\qquad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是,注意到被积函数是非负的,得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知,右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛,且其值为$\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{p}\right)$;而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当$\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3>-1$ (即$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>1$)时收敛,当$\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3\leqslant -1$ (即$\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}\leqslant 1$)时发散.

综上所述,可知原积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$当$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>1$ 时收敛,当$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\leqslant 1$ 时发散.

【4184】 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于$\dfrac{m}{|x-y|^p}\leqslant\dfrac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p}\leqslant\dfrac{M}{|x-y|^p}$,并注意到广义重积分收敛必绝对收敛,可知

积分 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与积分 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$

同时收敛或同时发散. 由对称性及被积函数的非负性可知,

$$\int_0^a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p}.\tag{1}$$

当 $p<1$ 时,

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p}=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{d}y}{(x-y)^p}=\int_0^a\frac{x^{1-p}}{1-p}\mathrm{d}x=\frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而,由(1)式知 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}=\frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$. 因此,当$p<1$时积分 $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$收敛.

现设 $p\geqslant 1$. 首先，我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}.\tag{2}$$

若 $p=1$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{x-y}=\int_\varepsilon^a(\ln x-\ln\varepsilon)dx$$

$$=a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}(a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon)=+\infty.$$

由此可知，此时 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 发散；若 $p=2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^2}=\int_\varepsilon^a\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{a}{\varepsilon}-1-\ln a+\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{a+\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}-1-\ln a\right)=+\infty.$$

由此可知，此时积分 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 发散；最后，若 $p>1$，$p\neq 2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^p}=\frac{1}{p-1}\int_\varepsilon^a(\varepsilon^{1-p}-x^{1-p})dx$$

$$=\frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}}\left(a-\frac{p-1}{p-2}\varepsilon\right)+\frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}.$$

从而，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=+\infty.$$

由此可知，此时积分 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 发散.

综上所述，可知积分 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散.

【4185】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知

$$\text{积分}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy\quad\text{与积分}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 采用极坐标，由于被积函数 $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$ 是正的，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}dr=2\pi\int_0^1\frac{rdr}{(1-r)^p(1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)^p\frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p}=2^{-p},$$

故积分 $\int_0^1\frac{rdr}{(1-r)^p(1+r)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛，$p>1$ 时发散；当 $p=1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{rdr}{1-r^2}=-\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\Big|_0^1=+\infty,$$

故积分也发散. 由此可知，积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$ 当 $p<1$ 时收敛；当 $p\geqslant 1$ 时发散.

【4186】 证明：若 1) 函数 $\varphi(x,y)$ 在有界区域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 内连续；2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant$

A 上连续；3) $p<1$，则积分 $\int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y$ 收敛.

证 首先注意，由于 $p<1$，故积分 $\int_b^B \frac{\mathrm{d}y}{|f(x)-y|^p}$ 对每个固定的 $x\in[a,A]$ 恒收敛.（若 $f(x)\in[b,B]$ 此为瑕积分，点 $f(x)$ 是瑕点，由于 $p<1$，它收敛；若 $f(x)\overline{\in}[b,B]$，则为常义积分，当然收敛）. 再根据 $\varphi(x,y)$ 的有界性，即知：对每个固定的 $x\in[a,A]$，积分 $\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y$ 都收敛. 令

$$F(x)=\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y \quad (a\leqslant x\leqslant A).$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant A$ 上的连续函数. 若已获证，则积分

$$\int_a^A \mathrm{d}x \int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y=\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$$

显然是收敛的（右端为常义积分），于是本题获证. 令 $c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant A}|f(x)|$. 今将函数 $\varphi(x,y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a\leqslant x\leqslant A, b-2c\leqslant y\leqslant B+2c)$ 上（只要规定

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,B), a\leqslant x\leqslant A, B<y\leqslant B+2c,\\ \varphi(x,b), a\leqslant x\leqslant A, b-2c\leqslant y<b\end{cases}$$

即可）. 延拓后的函数仍记为 $\varphi(x,y)$. 由于 $\varphi(x,y)$ 及 $|f(x)-y|^{1-p}$ 都在 R 上连续，故有界且一致连续：存在常数 M，使对一切 $(x,y)\in R$，有

$$|\varphi(x,y)|\leqslant M, \quad |f(x)-y|^{1-p}\leqslant M. \tag{1}$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（取 $\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$），使当 $|x_1-x_2|<\delta_1$，$|y_1-y_2|<\delta_1$（$(x_1,y_1)\in R$，$(x_2,y_2)\in R$）时，恒有

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|<\varepsilon, \tag{2}$$

$$\Big||f(x_1)-y_1|^{1-p}-|f(x_2)-y_2|^{1-p}\Big|<\varepsilon. \tag{3}$$

又由 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上的一致连续性可知，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x_1-x_2|<\delta_2$ （$x_1,x_2\in[a,A]$），恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\delta_1. \tag{4}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 于是，由(2)式可知：当 $|x_1-x_2|<\delta$ （$x_1,x_2\in[a,A]$）时，对一切 $b-c\leqslant y\leqslant B+c$，恒有

$$|\varphi(x_1,y+f(x_1))-\varphi(x_2,y+f(x_2))|<\varepsilon. \tag{5}$$

现设 $|x_1-x_2|<\delta$，（$x_1,x_2\in[a,A]$）. 不失一般性，设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，我们有

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_2)&=\int_b^B \frac{\varphi(x_1,y)}{|f(x_1)-y|^p}\mathrm{d}y-\int_b^B \frac{\varphi(x_2,y)}{|f(x_2)-y|^p}\mathrm{d}y\\
&=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}\mathrm{d}u-\int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}\mathrm{d}u\\
&=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))-\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}\mathrm{d}u-\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}\mathrm{d}u\\
&\quad+\int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}\mathrm{d}u\\
&=I_1-I_2+I_3,\end{aligned} \tag{6}$$

其中 I_1,I_2,I_3 分别表上式中的三个积分. 易知（$p<1$）

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}u}{|u|^p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}[\beta^{1-p}-\alpha^{1-p}], & 0\leqslant\alpha\leqslant\beta,\\ \frac{1}{1-p}[(-\alpha)^{1-p}-(-\beta)^{1-p}], & \alpha\leqslant\beta\leqslant 0,\\ \frac{1}{1-p}[\beta^{1-p}+(-\alpha)^{1-p}], & \alpha<0<\beta.\end{cases}$$

从而，在任何情形下均有

$$\int_\alpha^\beta \frac{du}{|u|^p} \leqslant \frac{1}{1-p}(|\beta|^{1-p}+|\alpha|^{1-p}); \tag{7}$$

而当 α,β 同号时，有

$$\int_\alpha^\beta \frac{du}{|u|^p} = \frac{1}{1-p}\left| |\beta|^{1-p}-|\alpha|^{1-p} \right|. \tag{8}$$

于是，由(5)式、(1)式及(7)式，得

$$|I_1|<\varepsilon\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|b-f(x_1)|^{1-p}) \leqslant \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \tag{9}$$

下面估计 I_2：若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号，则由(1)式、(8)式及(3)式，有

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} = \frac{M}{1-p}\left| |B-f(x_2)|^{1-p}-|B-f(x_1)|^{1-p} \right| < \frac{M\varepsilon}{1-p};$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号，即 $B-f(x_1)<0<B-f(x_2)$. 由于 $[B-f(x_2)]-[B-f(x_1)]=f(x_1)-f(x_2)<\delta_1$，故有 $|B-f(x_1)|<\delta_1$，$|B-f(x_2)|<\delta_1$. 于是，由(7)式并注意到 $\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$，即得

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leqslant \frac{M}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|B-f(x_1)|^{1-p}) < \frac{M}{1-p}(\delta_1^{1-p}+\delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}.$$

所以，在任何情况下均有

$$|I_2|<\frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{10}$$

同理，可得(在任何情况下)

$$|I_3|<\frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{11}$$

于是，由(6)式、(9)式、(10)式及(11)式，即得

$$|F(x_1)-F(x_2)|<|I_1|+|I_2|+|I_3|<\frac{4M\varepsilon}{1-p}.$$

由此可知，$F(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant A$ 上(一致)连续，证毕.

计算下列积分：

【4187】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\ln\frac{1}{r}dr = -2\pi\int_0^1 r\ln r dr = -2\pi\left(\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{r}{2}dr\right) = \frac{\pi}{2}.$$

【4188】 $\int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\quad (a>0)$.

解 $\int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx$.

作变量代换 $x=au$，则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx = 2a\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = 2aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = 2a\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2a\cdot\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi a.$$

【4189】 $\iint\limits_\Omega \ln\sin(x-y)dxdy$，其中区域 Ω 是由直线 $y=0$，$y=x$，$x=\pi$ 围成的.

解 作变量代换 $x=u+v$，$y=u-v$，则 Oxy 平面上的区域 Ω 变为 uv 平面上的区域 Ω'. 显然 Ω' 由直线 $u=v$，$v=0$，$u+v=\pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$. 于是，再注意到被积函数非正，即有

$$\iint\limits_\Omega \ln\sin(x-y)dxdy = 2\iint\limits_{\Omega'} \ln\sin 2v dudv = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv\int_v^{\pi-v}\ln\sin 2v du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin 2v\mathrm{d}v=2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v$$

$$=\pi^2\ln 2-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

【4190】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

提示 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标即可获解.

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标,有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant x\\ y\geqslant 0}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=2.$$

研究下列三重积分的收敛性:

【4191】 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解题思路 仿 4161 题,所给积分与积分 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 注意到 $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的,采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,即可知当 $p>\dfrac{3}{2}$ 时收敛,当 $p\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时发散.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,可知

$$\text{积分}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad\text{与}\quad\text{积分}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于被积函数 $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的,采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}=4\pi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

显然,$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\dfrac{3}{2}$ 时收敛,$p\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时发散;由此可知,$\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 当 $p>\dfrac{3}{2}$ 时收敛,当 $p\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时发散.

【4192】 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

提示 仿 4191 题,并采用球坐标.

解 和 4191 题完全类似(请参看 4191 题的解题过程),易得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}=4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

显然,$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 当 $p<\dfrac{3}{2}$ 时收敛,当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时发散;故 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 当 $p<\dfrac{3}{2}$ 时收敛,当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时发散.

【4193】 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}=8\iiint\limits_{\substack{x\geq0,y\geq0,z\geq0\\x+y+z>1}} \frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}.$$

其中,令

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x\geq0,y\geq0,z\geq0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leq3\},$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x\geq0,y\geq0,z\geq0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r>3\}.$$

令 $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x\geq0,y\geq0,z\geq0,x^p+y^q+z^r>3\}$,由于当 $x\geq0,y\geq0,z\geq0,x^p+y^q+z^r>3$ 时必有 $x+y+z>1$(否则,$x+y+z\leq1$,就有 $x\leq1,y\leq1,z\leq1$,从而,$x^p\leq1,y^q\leq1,z^r\leq1$,于是 $x^p+y^q+z^r\leq3$),故 $\Omega_2=\Omega_3$. 显然,$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}$ 为常义积分,故积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ 的敛散性取决于 $\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}$ 的敛散性. 对此积分,作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,\quad y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,\quad z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi.$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(R,\varphi,\psi)}=\frac{8}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是,由被积函数的非负性,并利用 3856 题的结果,得

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}=\frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi d\psi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi d\varphi\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$$

$$=\frac{8}{pqr}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$$

$$=\frac{2}{pqr}\mathrm{B}\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR.$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$ 当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3<-1$(即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$)时收敛,当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3\geq-1$ 时发散,故积分 $\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dxdydz}{x^p+y^q+z^r}$(从而,积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$)当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ 时收敛,当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq1$ 时发散.

【4194】 $\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$,其中 $0<m\leq|f(x,y,z)|\leq M$,而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是闭区间 $[0,a]$ 上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}\leq\frac{|f(x,y,z)|}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}\leq\frac{M}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

与积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

同时收敛或同时发散. 由被积函数 $\frac{1}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$ 的非负性,我们有

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}=\int_0^aF(x)dx,$$

其中

$$F(x)=\int_0^a\int_0^a\frac{dydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}\quad(0\leq x\leq a).$$

作变量代换 $$u=y-\varphi(x),\quad v=z-\psi(x)\quad (x\text{ 固定}),$$

则 $$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(y,z)}}=1.$$

从而，有

$$F(x)=\iint\limits_{\substack{-\varphi(x)\leqslant u\leqslant a-\varphi(x)\\ -\psi(x)\leqslant v\leqslant a-\psi(x)}}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p}. \tag{1}$$

先设 $p<1$. 令 $c=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}(|\varphi(x)|+|\psi(x)|)$，则由(1)式知，

$$0<F(x)\leqslant\iint\limits_{\substack{-c\leqslant u\leqslant a-c\\ -c\leqslant v\leqslant a-c}}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p}<\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2(a+c)^2}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}(a+c)}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=\frac{\pi}{1-p}[\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p},$$

即 $F(x)$ 有界(实际上，仿 4186 题的证明过程还可证明 $F(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续)，从而，$\int_0^a F(x)\mathrm{d}x$ 是常义积分，显然收敛. 由此可知，此时积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p} \tag{2}$$

收敛.

次设 $p\geqslant 1$，这时积分(2)可能收敛也可能发散，分两种情况讨论：

(ⅰ) 若不存在这样的 $x\in[0,a]$ 使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant a$ 同时成立(例如，$\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的值完全位于$[0,a]$之外；这时，对一切 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$，均有：连续函数 $\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p>0$. 从而，积分(2)收敛(这时是常义积分).

(ⅱ) 若存在这样的点 $x\in[0,a]$ 使 $0<\varphi(x)<a$，$0<\psi(x)<a$ 同时成立；由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性，必存在正数 ε 及闭区间 $I_0\subset[0,a]$，使当 $x\in I_0$ 时，恒有 $\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant a-\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant\psi(x)\leqslant a-\varepsilon$，从而由(1)式知：当 $x\in I_0$ 时，有

$$F(x)\geqslant\iint\limits_{\substack{-\varepsilon\leqslant u\leqslant\varepsilon\\ -\varepsilon\leqslant v\leqslant\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p}\geqslant\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\varepsilon^2}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=2\pi\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=+\infty\quad(\text{注意 } p\geqslant 1),$$

即当 $x\in I_0$ 时恒有 $F(x)=+\infty$，由此可知，积分 $\int_0^a F(x)\mathrm{d}x$ 发散. 于是，积分(2)发散.

综上所述，可知：积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

当 $p<1$ 时收敛；当 $p\geqslant 1$ 时，若不存在 $x\in[0,a]$ 使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant a$，则收敛；若存在 $x\in[0,a]$，使 $0<\varphi(x)<a$，$0<\psi(x)<a$，则发散.

【4195】 $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}$.

解 我们有(注意被积函数的非负性)

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}=2\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\\ x+y-z\geqslant 0}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}$$

$$=2\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-1}^{x+y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}+2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}=2I_1+2I_2,$$

其中 I_1 表第一个积分，I_2 表第二个积分.

若 $p<1$，则

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}}{1-p}\quad(x+y\geqslant 1),$$

故 $$I_1=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}(x+y+1)^{1-p}dxdy,$$

$$I_2=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}[(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}]dxdy.$$

显然，I_1 与 I_2 均为常义(二重)积分，当然收敛. 因此，当 $p<1$ 时，积分 $\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$ 收敛.

若 $p\geqslant 1$，则当 $x+y>-1$ 时，$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{|x+y-z|^p}=+\infty$，故 $I_1=+\infty$，又显然有 $I_2>0$，故此时积分 $\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$ 发散.

计算下列积分：

【4196】 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}$.

解 由于被积函数非负，故

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}=\int_0^1\frac{dx}{x^p}\int_0^1\frac{dy}{y^q}\int_0^1\frac{dz}{z^r}=\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}\quad(\text{若 } p<1,q<1,r<1).$$

注意，若 $p\geqslant 1$ 或 $q\geqslant 1$ 或 $r\geqslant 1$，则 $$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}=+\infty.$$

【4197】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

提示 注意到被积函数非负，采用球坐标即可获解.

解 采用球坐标，由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^4}=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$

【4198】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

解 采用球坐标，由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr=4\pi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr.$$

作代换 $t=r^2$，则当 $p<1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}dr=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},1-p\right).$$

从而，当 $p<1$ 时，有 $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right).$$

注意，若 $p\geqslant 1$，则 $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=+\infty$，故此时

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=+\infty.$$

【4199】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$.

解 采用球坐标，由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr=4\pi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr.$$

作代换 $r^2=t$，则 $$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是， $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

【4200】 计算积分 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j \ (a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型.

解 用 A 表矩阵 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ 是正定的，故由高等代数中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

使

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$；也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1=b_{11}x_1'+b_{12}x_2'+b_{13}x_3' \\ x_2=b_{21}x_1'+b_{22}x_2'+b_{23}x_3' \\ x_3=b_{31}x_1'+b_{32}x_2'+b_{33}x_3' \end{cases} \tag{3}$$

之下，二次型 $P(x_1,x_2,x_3)$ 化为平方和：

$$P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\lambda_3 x_3'^2. \tag{4}$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$(B' 表 B 的转置矩阵)，从而，$|B|=|b_{ij}|=\pm 1$. 显然，

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x_1',x_2',x_3')}=|b_{ij}|=\pm 1.$$

由(4)式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)} dx_1 dx_2 dx_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2} dx_1' dx_2' dx_3'. \tag{5}$$

再作变量代换 $x_1'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1, x_2'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2, x_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$，则 $\frac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$. 于是(注意 4199 题的结果)，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2} dx_1' dx_2' dx_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)} du_1 du_2 du_3=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}. \tag{6}$$

但由(2)式知(记 $\Delta=|a_{ij}|=|A|$，注意，由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ 是正定的，故 $\Delta>0$)

$$\Delta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{7}$$

于是，根据(5)、(6)、(7)诸式，最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)} dx_1 dx_2 dx_3=\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§10. 多重积分

1° **多重积分的直接计算法** 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在由下列不等式确定的有界区域 Ω 内是连续的：

$$\begin{cases} x_1'\leqslant x_1\leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2''(x_1) \\ \quad\vdots \\ x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数，$x_2'(x_1)$，$x_2''(x_1)$，$\cdots$，$x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$，$x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 为连续函数，则相应的多重积分可按下列公式来计算：

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{x_1'}^{x_1''}\mathrm{d}x_1\int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_n'(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

2° **多重积分中的变量代换** 若

1）函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界可测区域 Ω 内是一致连续的；

2）连续可微函数 $x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，把 $Ox_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间内的区域 Ω 一一映射成 $O'\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 空间内的有界区域 Ω'；

3）在区域 Ω' 内雅可比行列式 $I=\dfrac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq0$，

则成立公式

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\iint_{\Omega'}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|I|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

特别是，根据公式

$$\begin{aligned} x_1&=r\cos\varphi_1, \\ x_2&=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1}&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

变换成极坐标 $(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 时，有

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

【4201】 设 $K(x,y)$ 为区域 $R[a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b]$ 内的连续函数，且

$$K_n(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

证明：
$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\mathrm{d}t.$$

证

$$\begin{aligned} &K_{n+m+1}(x,y) \\ =&\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,t)K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_m \\ =&\int_a^b\left\{\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right]\right. \\ &\left.\cdot\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_m\right]\right\}\mathrm{d}t \\ =&\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

【4202】 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为区域 $0\leqslant x_i\leqslant x$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 内的连续函数，证明等式：

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f dx_n=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f dx_1\quad(n\geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭区域：

$$\Omega=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_i\leqslant x,i=1,2,\cdots,n\right\},$$

$$\Omega_1=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x\right\}.$$

由假定 $f(x_1,\cdots,x_n)$在区域 Ω 上连续，显然，$\Omega_1\subset\Omega,\Omega_2\subset\Omega$，故$f(x_1,\cdots,x_n)$在 Ω_1 与 Ω_2 上连续. 根据化 n 重积分为累次积分的公式，我们有

$$\iint_{\Omega_1}\cdots\int f dx_1\cdots dx_n=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f dx_n,\tag{1}$$

$$\iint_{\Omega_2}\cdots\int f dx_1\cdots dx_n=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f dx_1.\tag{2}$$

下证 $\Omega_1=\Omega_2$，事实上，若$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$，则

$$0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1},\tag{3}$$

从而，
$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x.\tag{4}$$

于是，
$$0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x.\tag{5}$$

由此可知$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$. 反之，若$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$，则(5)式成立. 从而，(4)式显然成立，由此又知(3)式成立，故$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$，于是，$\Omega_1=\Omega_2$ 获证. 由此，再根据(1)式与(2)式，即得

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f dx_n=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f dx_1.$$

证毕.

【4203】 证明：$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n$，其中 f 为连续函数.

提示 利用数学归纳法.

证 证法 1：

我们有
$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$
$$=\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1}f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}}f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n.$$

令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$. 由于 f 是连续函数，故 $F'(s)=f(s)$. 我们有(注意到 $F(0)=0$)

$$\int_0^{t_{n-2}}f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\int_0^{t_{n-2}}F(t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}=\int_0^{t_{n-2}}F(t_{n-1})\,F'(t_{n-1})dt_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-1})]^2\Bigg|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}=\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}}f(t_{n-2})dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}}f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\int_0^{t_{n-3}}\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2F'(t_{n-2})dt_{n-2}$$
$$=\frac{1}{3!}[F(t_{n-3})]^3,$$

⋮

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{t_1}f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}}f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}.$$

于是，
$$\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1}f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\int_0^t\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}f(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t [F(t_1)]^{n-1}F'(t_1)\mathrm{d}t_1=\frac{1}{n!}[F(t)]^n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^n.$$

从而，
$$\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)\mathrm{d}t_n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^n.$$

证毕.

证法 2：

用数学归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立. 今设 $n=k$ 时公式成立，要证 $n=k+1$ 时公式也成立. 我们有

$$\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\mathrm{d}t_{k+1}=\int_0^t f(t_1)\left[\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\mathrm{d}t_{k+1}\right]\mathrm{d}t_1.$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立，故

$$\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\mathrm{d}t_{k+1}=\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^k.$$

从而(令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau$，则 $F'(s)=f(s)$)，

$$\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})\mathrm{d}t_{k+1}=\int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^k\mathrm{d}t_1=\frac{1}{k!}\int_0^t [F(t_1)]^kF'(t_1)\mathrm{d}t_1$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}[F(t_1)]^{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^{k+1},$$

因此，所述公式当 $n=k+1$ 时成立. 于是，由数学归纳法知，所述公式对一切正整数 n 均成立. 证毕.

计算下列多重积分：

【4204】 (1) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$；

(2) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

提示 (1)化成累次积分即可获解；

(2)将被积函数展开，化成累次积分并利用本题(1)的结果.

解 (1) $$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x_{n-1}$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-2}^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x_{n-2}$$
$$=\cdots=\frac{n}{3}.$$

(2) $$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+x_3x_4$$
$$+\cdots+x_3x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)]\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{n}{3}^{*)}+2\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1[(x_1x_2+\cdots x_1x_n)+(x_2x_3+\cdots+x_2x_n)+\cdots+x_{n-1}x_n]\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{n}{3}+2\left(\frac{n-1}{4}+\frac{n-2}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)=\frac{n(3n+1)}{12}.$$

*) 利用本题(1)的结果.

【4205】 $$I_n=\underset{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 解法 1：

化为累次积分，有 $I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$，

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}=\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}dx_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2dx_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

$$\vdots$$

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{a-x_1}dx_2\int_0^{a-x_1-x_2}dx_3\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是，
$$I_n=\int_0^a\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}dx_1=\frac{a^n}{n!}.$$

解法 2：

我们有
$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换：
$$x_1=a\xi_1,x_2=a\xi_2,\cdots,x_n=a\xi_n,$$

即得

$$I_n=a^n\int_0^1d\xi_1\int_0^{1-\xi_1}d\xi_2\cdots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}}d\xi_n=a^n\underset{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n=a^nI_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值.

另一方面，我们有

$$I_n(1)=\int_0^1d\xi_n\underset{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant1-\xi_n}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}=I_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}d\xi_n=\frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式，可得
$$I_n(1)=\frac{1}{n!},$$

于是，最后得 $I_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

【4206】 $\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_ndx_n$.

提示 化成累次积分或利用 4203 题的结果，均可获解.

解 $\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_ndx_n=\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}\frac{1}{2}x_1x_2\cdots x_{n-1}^3dx_{n-1}$

$$=\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x_1x_2\cdots x_{n-2}^5dx_{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1x_1^{2n-1}dx_1=\frac{1}{2\cdot4\cdots2n}=\frac{1}{2^nn!}.$$

*） 也可利用 4203 题的结果直接得

$$\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_ndx_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\tau d\tau\right)^n=\frac{1}{2^nn!}.$$

【4207】 $\underset{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$.

解 作代换
$$x_1=u_1(1-u_2),$$

$$x_2=u_1u_2(1-u_3)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}=u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n),$$
$$x_n=u_1u_2\cdots u_n,$$

则由 $x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant1$ 知 $0\leqslant u_i\leqslant1\ (i=1,2,\cdots,n)$，且有

$$I=\begin{vmatrix}1-u_2 & u_2(1-u_3) & \cdots u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2u_3\cdots u_n\\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \cdots u_1u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\cdots u_n\\ 0 & -u_1u_2 & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots u_1u_2\cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\cdots u_{n-2}u_n\\ 0 & 0 & \cdots -u_1\cdots u_{n-1} & u_1\cdots u_{n-1}\end{vmatrix}$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素，则在对角线下面的全部元素都等于零，而在对角线上的元素就等于$1,u_1,u_1u_2,\cdots,u_1\cdots u_{n-1}$. 因此，得

$$I=u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}.$$

于是，最后得

$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant1}}\cdots\int\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1u_1^{n-\frac{1}{2}}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}u_n$$
$$=\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}.$$

【4208】 求以平面 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\pm h_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$
为界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积，这里设 $\Delta=|a_{ij}|\neq0$.

解 令 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，即得 $2n$ 面体的体积

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_2}^{h_2}\cdots\int_{-h_n}^{h_n}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\frac{2^nh_1\cdots h_n}{|\Delta|}.$$

【4209】 求 n 维角锥 $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant1,x_i\geqslant0\ (i=1,2,\cdots,n)(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$的体积.

提示 令 $x_i=a_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，并利用 4205 题的结果.

解 令 $x_i=a_i\xi_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$，即得体积

$$V=a_1a_2\cdots a_n\iint\limits_{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1}}\cdots\int\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}{}^{*)}.$$

*） 利用 4205 题的结果.

【4210】 求以曲面 $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n$
为界的 n 维圆锥的体积.

解 作代换
$$x_1=a_1r\cos\varphi_1,$$
$$x_2=a_2r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\vdots$$
$$x_{n-2}=a_{n-2}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$$
$$x_{n-1}=a_{n-1}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$
$$x_n=a_nx_n',$$

则域 V 为

$$0\leqslant r\leqslant1,0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,\cdots,0\leqslant\varphi_{n-3}\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant2\pi,r\leqslant x_n'\leqslant1,$$

并且

$$|I|=a_1a_2\cdots a_nr^{n-2}\sin^{n-3}\varphi_1\sin^{n-4}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}.$$

于是，所求的体积为

$$V=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1 r^{n-2}\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_r^1 \mathrm{d}x'_n$$

$$=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}$$

$$=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\,^{*)}$$

$$=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\mathrm{B}\left(\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{n-3}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots\mathrm{B}\left(\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right)\,^{**)}$$

$$=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\frac{2\pi a_1a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\frac{a_1a_2\cdots a_n\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1a_2\cdots a_n.$$

*） 利用等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\ (a>0)$，即得

$$\int_0^\pi \sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

**） 利用 3856 题的结果.

【4211】 求 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$ 的体积.

解 令 $x_i=a\xi_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，即得体积

$$V_n=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积. 但是

$$V_n(1)=\underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\int_{-1}^1\mathrm{d}\xi_n\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

$$=V_{n-1}(1)\int_{-1}^1(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\xi_n=2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

因为 $V_1(1)=2$，故由上述循环公式可得 $V_n(1)=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

因此，所求的体积为 $V_n=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n$.

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},\qquad V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!!}a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1,V_2,V_3 可求得熟知的值：$2a,\pi a^2,\frac{4}{3}\pi a^3$.

【4212】 求 $\underset{\Omega}{\int\int\cdots\int} x_n^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中区域 Ω 是由下列不等式确定的：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,\quad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

提示 利用 4211 题的结果.

解 $$\underset{\Omega}{\int\int\cdots\int} x_n^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2\mathrm{d}x_n\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a^{n-1\,*)}.$$

*) 利用 4211 题的结果.

【4213】 计算 $$\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}{\int\int\cdots\int}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

提示 利用 4211 题的结果.

解 $$\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}{\int\int\cdots\int}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\frac{\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\pi\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}=\pi\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{}^{*)}=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

*) 利用 4211 题的结果.

【4214】 证明等式： $$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u.$$

提示 利用 4202 题的结果.

证 $$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1{}^{*)}=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^x(x-x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2}(x-x_3)^2\mathrm{d}x_3$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_5}^x\frac{1}{2\cdot 3}(x-x_4)^3\mathrm{d}x_4$$

$$=\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\frac{1}{(n-2)!}(x-x_{n-1})^{n-2}\mathrm{d}x_{n-1}=\int_0^x\frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}f(x_n)\mathrm{d}x_n.$$

在上述积分中，将 x_n 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u.$$

*) 利用 4202 题的结果.

【4215】 证明等式： $$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}\,x_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

证 利用 4202 题的结果，即得

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}\,x_{n+1}=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x x_1\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_0^x f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x\frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2x_3\mathrm{d}x_3$$

$=\cdots$

$$=\int_0^x f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}(x^2-x_n^2)^{n-1}x_n\mathrm{d}x_n=\int_0^x \frac{1}{2^n n!}f(x_{n-1})(x^2-x_{n-1}^2)^n\mathrm{d}x_{n-1}.$$

在上述积分中，将 x_{n-1} 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n} f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

【4216】 证明狄利克雷公式：

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}\quad(p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时，公式显然成立，即 $\displaystyle\int_{0\leqslant x_1\leqslant 1} x_1^{p_1-1}\mathrm{d}x_1=\frac{1}{p_1}=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}$.

其次，设公式对 $n-1$ 成立，今证公式对 n 也成立. 为此，将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1-x_n}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中作代换

$$x_1=(1-x_n)\xi_1,x_2=(1-x_n)\xi_2,\cdots,x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1},$$

即得

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\mathrm{B}(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\cdot\frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来，我们得知公式对 n 重积分也正确. 从而，对 n 为任意的正整数时，狄利克雷公式均成立.

【4217】 证明刘维耳公式：

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u\quad(p_1,p_2,\cdots,p_n>0),$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时，公式显然成立. 当 $n=2$ 时，公式也成立，即

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant 1}}{\iint} f(x_1+x_2)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}u.$$

事实上，令 Ω 表区域：$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_1+x_2\leqslant 1$. 作代换 $x_1=\xi_1$，$x_1+x_2=\xi_2$，及 $t=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$，

则有 $$\iint_\Omega f(x_1+x_2)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1 f(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\int_0^{\xi_2}\xi_1^{p_1-1}(\xi_2-\xi_1)^{p_2-1}\mathrm{d}\xi_1$$
$$=\int_0^1 f(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{p_2-1}\xi_2^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(\xi_2)\xi_2^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}\xi_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}u.$$

其次，设公式对于 $n-1$ 成立，今证对于 n 公式也成立. 为此，将公式左端写为

$$\iint\limits_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n.$$

令

$$\psi(t)=\int_0^{1-t}f(t+x_n)x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n$$

代入上式，并利用公式对 $n-1$ 成立的假定，得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\psi(t)t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\mathrm{d}t.$$

利用上面已证的 $n=2$ 时的公式，于是即得

$$\iint\limits_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^{1-t}f(t+x_n)t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\iint\limits_{\substack{t,x_n\geqslant 0\\ t+x_n\leqslant 1}}f(t+x_n)t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\cdot\frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u,$$

即公式对于 n 成立. 从而，公式对于 n 为任意正整数均成立.

【4218】 将区域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n\geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

化为一重积分，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换

$$\begin{aligned}x_1&=Rr\cos\varphi,\\ x_2&=Rr\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ &\vdots\\ x_{n-1}&=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x_n&=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},\end{aligned}$$

则有

$$I=R^n r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

于是，

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=R^n\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}$$

$$=2\pi R^n\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)\mathrm{d}r^{*)}$$

$$=R^n\frac{2\pi\cdot\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)\mathrm{d}r=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1(r^2)^{\frac{n}{2}-1}f(Rr)\mathrm{d}(r^2)$$

$$=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}f(R\sqrt{u})\mathrm{d}u.$$

*） 参看 4210 题的计算过程.

【4219】 计算半径为 R，密度为 ρ_0 的均质球对自身的引力势，即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\iiint\frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 我们有 $$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}dx_1dy_1dz_1\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}.$$

由 4155 题的结果可知 $$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}=2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. 于是（利用球坐标），

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1dy_1dz_1=\frac{\rho_0^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^R\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2dr$$

$$=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

【4220】 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定二次型，计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_j+c\right\}}dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i=y_i+\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是，易得（注意到 $a_{ij}=a_{ji}$）

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_j+c$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\right)+b_i\right]y_i+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j+2\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+c.$$

由于 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是正定形，故必有 $\delta=|a_{ij}|>0$，从而，线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j+b_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

有唯一的一组解 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，今取变换（1）式中的诸 α_i 即为方程组（2）的解. 于是，

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+c',\tag{3}$$

其中

$$c'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\right)\alpha_i+2\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+c=-\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+2\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+c=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i+c.\tag{4}$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表示 c'，令

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{ij}&\vdots&b_i\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_j&\vdots&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&b_n\\b_1&\cdots&b_n&c\end{vmatrix}$$

（$n+1$ 阶行列式，即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式）. 将此行列式的第一列乘上 α_1，第二列乘上 α_2，…，第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去，并注意到（2）式与（4）式，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j+b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & \sum_{j=1}^{n} b_j\alpha_j+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c' \end{vmatrix}=c'|a_{ij}|=c'\delta,$$

故

$$c'=\frac{\Delta}{\delta}. \tag{5}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j$ 是正定二次型，故由高等代数中二次型的理论知，存在正交矩阵

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}z_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

下，二次型变为平方和：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2, \tag{7}$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$；也即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵，故 $P^{-1}=P'$（P' 表 P 的转置矩阵），且 $|P|=|p_{ij}|=\pm1$.

由(8)式又知

$$\delta=|a_{ij}|=|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{9}$$

根据(1)式与(6)式，可知

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}=1,\quad \frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}=|p_{ij}|=|P|=\pm1.$$

于是，利用广义 n 重积分的变量代换公式，并注意到被积函数的非负性，得（注意(3)式、(5)式与(7)式）

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}\,dx_1dx_2\cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+c'\right\}}\left|\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\right|dy_1dy_2\cdots dy_n \\
&= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\right\}}\,dy_1dy_2\cdots dy_n \\
&= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}\left|\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}\right|dz_1dz_2\cdots dz_n \\
&= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}\,dz_1dz_2\cdots dz_n \\
&= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1z_1^2}dz_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_2z_2^2}dz_2\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_nz_n^2}dz_n\right).
\end{aligned}$$

作代换 $z_i=\frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$（$i$ 固定），得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_iz_i^2}dz_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

以此代入上式，并注意到(9)式，最后得

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}dx_1dx_2\cdots dx_n=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}=\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}\;e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§11. 曲线积分

1° **第一型曲线积分** 若函数 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\ (t_0\leqslant t\leqslant T)\tag{1}$$

的各点上有定义并且连续，ds 为弧长的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_{t_0}^{T}f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

这个积分的特征在于它与曲线 C 的方向无关.

2° **第一型曲线积分在力学上的应用** 若 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为曲线 C 在点 (x,y,z) 的线密度，则曲线 C 的质量等于：

$$M=\int_C\rho(x,y,z)ds.$$

此曲线的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由以下公式来表示：

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,\quad z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds.$$

3° **第二型曲线积分** 若函数 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 在曲线(1)上的各点是连续的，且曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt.\tag{2}$$

当沿曲线 C 的方向变更时，此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P,Q,R\}$ 所作的功.

4° **全微分的情形** 若

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du,$$

式中 $u=u(x,y,z)$ 为区域 V 内的单值函数，则积分值与完全位于区域 V 内的曲线 C 的形状无关：

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

式中 (x_1,y_1,z_1) 为积分路径的始点，(x_2,y_2,z_2) 为其终点. 最简单的情况下，若区域 V 是单联通的，而函数 P,Q,R 有连续的一阶偏导数，则上式成立的充分必要条件为：在区域 V 内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，在区域 V 是标准长方体这种简单情形下，函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz+c,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为区域 V 内某一固定的点，而 c 是任意常数.

计算下列第一型曲线积分：

【4221】 $\int_C(x+y)ds$，其中 C 为以 $O(0,0)$，$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

解 $\int_C(x+y)ds=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{BO}(x+y)ds$

$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}\,dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}.$

【4222】 $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$，其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一拱.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t=2a\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t$.

于是，$\int_C y^2\,\mathrm{d}s=2a^3\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,\mathrm{d}u=\dfrac{256}{15}a^3$.

【4223】 $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$ 其中 C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t=at\,\mathrm{d}t$.

于是，$\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)\,\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

【4224】 $\int_C xy\,\mathrm{d}s$ 其中 C 为双曲线 $x=a\operatorname{ch}t$，$y=a\operatorname{sh}t$（$0\leqslant t\leqslant t_0$）的弧.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t+a^2\operatorname{ch}^2 t}\ \mathrm{d}t=a\sqrt{\operatorname{ch}2t}\ \mathrm{d}t$.

于是，$\int_C xy\,\mathrm{d}s=a^3\int_0^{t_0}\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\sqrt{\operatorname{ch}2t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\operatorname{sh}2t\sqrt{\operatorname{ch}2t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{a^3}{4}\int_0^{t_0}\sqrt{\operatorname{ch}2t}\,\mathrm{d}(\operatorname{ch}2t)=\dfrac{a^3}{6}(\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0}-1)$.

【4225】 $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$，其中 C 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 解法 1：

按直角坐标方程计算，弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$.

于是，$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s=4\int_0^a[x^{\frac{4}{3}}+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2]\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a(2x+a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}x=4a^{\frac{7}{3}}$.

解法 2：

按参数方程计算. 若令 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t\quad(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

于是，$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s=4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t=24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}(\sin t)=4a^{\frac{7}{3}}$.

【4226】 $\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$ 其中 C 为由曲线 $r=a$，$\varphi=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$（r 和 φ 为极坐标）给出的凸围线.

解 凸围线由三段组成，分别是：直线段 $\varphi=0$（$0\leqslant r\leqslant a$）；圆弧段 $r=a$（$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$）；直线段 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$（$0\leqslant r\leqslant a$）. 弧长的微分相应地是：$\mathrm{d}s=\mathrm{d}r$；$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\varphi=a\,\mathrm{d}\varphi$；$\mathrm{d}s=\mathrm{d}r$. 于是，

$$\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a a\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^a\mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r=2(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi a\mathrm{e}^a}{4}.$$

【4227】 $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$ 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\varphi$，弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\ \mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ \mathrm{d}\varphi.$$

于是，$\int_C |y|\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2(2-\sqrt{2})$.

【4228】 $\int_C x\,\mathrm{d}s$，其中 C 为对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{k\varphi}$（$k>0$）在圆 $r=a$ 内的部分.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\varphi$ （$-\infty<\varphi<0$）.

于是，$\int_C x\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^0 a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi\cdot a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\varphi=a^2\sqrt{1+k^2}\dfrac{2k\cos\varphi+\sin\varphi}{1+4k^2}\mathrm{e}^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^0=\dfrac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

【4229】 $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周，弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2y}\mathrm{d}x=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\quad(0\leqslant x\leqslant a).$$

于是，
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=2\int_0^a \sqrt{ax}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x=a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}}=2a^2.$$

【4230】 $\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$，其中 C 为悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x.$$

于是，
$$\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)}{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\arctan\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{a}.$$

求下列空间曲线的弧长(参数是正的)：

【4231】 $x=3t,y=3t^2,z=2t^3$，从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t=3(2t^2+1)\mathrm{d}t.$$

于是，弧长为
$$s=\int_0^1 3(2t^2+1)\mathrm{d}t=5.$$

【4232】 $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,z=\mathrm{e}^{-t}$，当 $0<t<+\infty$.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

于是，弧长为
$$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}.$$

【4233】 $y=a\arcsin\frac{x}{a},z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$，从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}=\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x\quad(|x_0|<a).$$

于是，当 $x_0\geqslant 0$ 时，有

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$s=\int_{x_0}^0\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|.$$

总之，当 $|x_0|<a$，有 $s=|z_0|+|x_0|$.

【4234】 $(x-y)^2=a(x+y),x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$，从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 由 $(x-y)^2=a(x+y),x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}+\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right],\qquad y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}-\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right].$$

注意到

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2=\frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4}\sqrt[3]{z^2}+\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^{-2}}=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}},$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,\mathrm{d}z=\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\frac{1}{t}+1}\,\frac{3\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2+t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}}\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right).$$

【4235】 $x^2+y^2=cz,\ \frac{y}{x}=\tan\frac{z}{c}$，从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

提示 取曲线的参数方程为 $x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\ y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\ z=z$.

解 取曲线的参数方程为 $x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\ y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\ z=z$，则弧长的微分为

$$ds=\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dz=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}\,dz$$

$$=\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}\,dz.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{z}{c}}\,dz+\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}dz=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

【4236】 $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ch}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=a$，从点 $(a,0,0)$ 到点 $B(x,y,z)$.

解 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi,\ y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$，不妨设 $z>0$，则有

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi}\right)}=a\,\mathrm{th}\varphi.$$

而 $\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2(1-\mathrm{th}^2\varphi)}=\frac{a}{\mathrm{ch}\varphi}$，故 $x=\frac{a\cos\varphi}{\mathrm{ch}\varphi},\ y=\frac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\varphi},\ z=a\,\mathrm{th}\varphi$ 为曲线的参数方程，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi=a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2\varphi+\mathrm{sh}^2\varphi+1}{\mathrm{ch}^4\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2}a\frac{d\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{2}a\frac{d\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}=\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{2}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}d\varphi=2\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{1}{1+(e^{\varphi})^2}d(e^{\varphi})$$

$$=2\sqrt{2}a\arctan e^{\varphi}\Big|_0^{\varphi}=2\sqrt{2}a\left(\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)^{*)}=\sqrt{2}a\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}{}^{**)}.$$

容易推证，当 $z<0$ 时，弧长为 $s=\sqrt{2}a\arctan\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

总之，最后得 $s=\sqrt{2}a\arctan\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

*) 由 $z=a\tan\varphi$ 知：$z(e^{\varphi}+e^{-\varphi})=a(e^{\varphi}-e^{-\varphi}),\quad z(e^{2\varphi}+1)=a(e^{2\varphi}-1)$，

从而，$e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}$ 或 $e^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

**) 由于 $\tan\left(\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},\ \tan\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}$，

故在主值范围内有 $\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

计算沿空间曲线的第一型曲线积分：

【4237】 $\int_C(x^2+y^2+z^2)ds$ 其中 C 为螺线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段.

解　弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$. 于是,

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

【4238】　$\int_C x^2\mathrm{d}s$,其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

提示　由对称性知:$\int_C x^2\mathrm{d}s=\int_C y^2\mathrm{d}s=\int_C z^2\mathrm{d}s$.

解　解法 1:

由对称性知:$\int_C x^2\mathrm{d}s=\int_C y^2\mathrm{d}s=\int_C z^2\mathrm{d}s$. 于是,

$$\int_C x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_C \mathrm{d}s=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

解法 2:

作代换 $u=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $v=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}$, $w=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$. 则圆周 C 化为 $u^2+v^2+w^2=a^2$, $w=0$. 于是,

$$\int_C x^2\mathrm{d}s=\int_C\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2\mathrm{d}s=\int_C\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\int_C(3u^2+v^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_C uv\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{6}\int_C a^2\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_C u^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_C uv\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}a^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

【4239】　$\int_C z\mathrm{d}s$,其中 C 为圆锥螺旋线 $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

解　弧长的微分为　$\mathrm{d}s=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\ \mathrm{d}t=\sqrt{2+t^2}\ \mathrm{d}t$.

于是,

$$\int_C z\mathrm{d}s=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right].$$

【4240】　$\int_C z\mathrm{d}s$,其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧.

解　由曲线方程得

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{a^2}+y^2}=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\ .$$

从而,曲线的参数方程可取为　$x=\frac{y^2}{a}$,　$y=y$,　$z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}$.

弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\ \mathrm{d}y=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\mathrm{d}y.$$

于是,

$$\int_C z\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a\sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}\ \mathrm{d}\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\left(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right)-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ \frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ \frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}\ a^2}{16}}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right].$$

【4241】$^+$ 设曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$在点$(x,y)$的线密度等于 $\rho=|y|$，求其质量.

解 质量 $M=\int_C |y|\,ds$，其中 C 为椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

先设 $a>b$. 这时

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 于是，

$$M=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=-ab\int_0^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)+ab\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$=ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du+ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du=4ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varepsilon u\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\right]\Bigg|_{u=0}^{u=1}=2b^2+2ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

次设 $a<b$. 这时 $ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt$，

其中 $\varepsilon_1=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 仿前，有

$$M=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt=4ab\int_0^1\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon_1}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_1 u\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}+\frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1 u+\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2})\right]\Bigg|_{u=0}^{u=1}=2b^2+2ab\frac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}.$$

最后，若 $a=b$，则椭圆退化成圆，这时 $ds=a\,dt$，故

$$M=\int_0^{\pi}a^2\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-a\sin t)a\,dt=4a^2.$$

综上所述，可知：

$$M=\begin{cases}2b^2+2ab\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}, & a>b,\\[2ex] 2b^2+2ab\dfrac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}, & a<b,\\[2ex] 4a^2, & a=b,\end{cases}$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\ (a>b)$，$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\ (a<b)$，

【4242】 求曲线 $x=at, y=\frac{a}{2}t^2, z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$的弧的质量，其密度按规律 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

解 弧长的微分为 $ds=\sqrt{a^2+a^2t^2+a^2t^4}\,dt=a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$，

而密度 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}=t$. 于是，质量为(作代换 $u=t^2$)

$$M=\int_C\sqrt{\frac{2y}{a}}\,ds=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+u+u^2}\,du$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{u+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{1+u+u^2}+\frac{3}{8}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

【4243】 计算均匀曲线 $y=a\text{ch}\,\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的质心的坐标.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\text{sh}^2\,\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x=\text{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x.$$

质量为
$$M=\rho_0\int_0^b \text{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\rho_0\,\text{sh}\,\frac{b}{a}=\rho_0\,\sqrt{h^2-a^2}\,^{*)}.$$

于是,质心的坐标为
$$x_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b x\text{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{\rho_0}{M}\left[ab\text{sh}\,\frac{b}{a}-a^2\left(\text{ch}\,\frac{b}{a}-1\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\,\sqrt{h^2-a^2}-a^2\left(\frac{h}{a}-1\right)\right]$$
$$=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$
$$y_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b y\text{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b \text{ch}^2\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\frac{1+\text{ch}2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\text{sh}\,\frac{2x}{a}\right]\Big|_0^b$$
$$=\frac{a\rho_0}{M}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\text{sh}\,\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\,\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\,\sqrt{h^2-a^2}}.$$

*) 由 $h=a\text{ch}\,\frac{b}{a}$ 知:$\text{ch}\,\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$. 从而,$\text{sh}\,\frac{b}{a}=\sqrt{\text{ch}^2\,\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}$.

【4244】 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的弧的质心.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t.$$

质量为 $M=2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\rho_0$. 于是,质心的坐标为
$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t-\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=-at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+a\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t+\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{4a}{3};$$
$$y_0=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t-\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{4a}{3}.$$

【4245】 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x\geqslant0, y\geqslant0, z\geqslant0$ 的围线的质心的坐标.

解 作球坐标变换 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:
$$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$x=\cos\psi,\ y=0,\ z=a\sin\psi;\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$x=0,\ y=a\cos\psi,\ z=a\sin\psi;\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为 $s=3\cdot\frac{\pi a}{2}=\frac{3\pi a}{2}$. 于是,质心的坐标为
$$x_0=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\cdot a\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\psi\cdot a\mathrm{d}\psi}{\frac{3\pi a}{2}}=\frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知:$x_0=y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}$.

【4246】 求均匀的弧 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\leqslant0)$ 的质心的坐标.

解 弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\,e^t\,\mathrm{d}t$.

质量为
$$M=\int_{-\infty}^0\sqrt{3}\,e^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}.$$

于是，质心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{0}e^t\cos t\cdot\sqrt{3}e^t\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t\,dt=\frac{2\cos t+\sin t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2}{5}.$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{0}e^t\sin t\cdot\sqrt{3}e^t\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\sin t\,dt=\frac{2\sin t-\cos t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{5}.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{0}e^t\cdot\sqrt{3}e^t\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}.$$

【4247】 求螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{h}{2\pi}t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一支对坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为 $$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt.$$

于是，转动惯量为

$$I_x=\int_C(y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_y=\int_C(x^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_z=\int_C(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

【4248】 计算第二型曲线积分 $$\int_{OA}x\,dy-y\,dx,$$

式中 O 为坐标原点，A 点的坐标为(1,2)并设：(1)OA 为直线段；(2)OA 为抛物线，其轴为 Oy；(3)OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线.

解 (1)直线段的方程为 $y=2x$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(2x-2x)dx=0.$$

(2)抛物线段的方程为 $y=2x^2$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(4x^2-2x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

(3)线段 OB 的方程为 $y=0$，BA 的方程为 $x=1$. 于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^2 0\cdot dx+\int_0^2 dy=2.$$

【4249】 对于上题中所指示的路径(1)，(2)，(3)，计算

$$\int_{OA}x\,dy+y\,dx.$$

解 (1) $\int_{OA}x\,dy+y\,dx=\int_0^1(2x+2x)dx=2.$

(2) $\int_{OA}x\,dy+y\,dx=\int_0^1(4x^2+2x^2)dx=2.$

(3) $\int_{OA}x\,dy+y\,dx=\int_0^2 dy=2.$

在参数增加的方向，沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分：

【4250】 $\int_C(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 C 为抛物线 $y=x^2$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 由题设 $y=x^2$，从而，$dy=2x\,dx$. 于是，

$$\int_C (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+2x(x^4-2x^3)]\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

【4251】 $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$,其中 C 为曲线 $y=1-|1-x|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=1-(1-x)=x$,从而,$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$;当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=1-(x-1)=2-x$,从而,$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$. 于是,

$$\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x+\int_1^2[x^2+(2-x)^2-x^2+(2-x)^2]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

【4252】 $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$,其中 C 为依逆时针方向通过的椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 利用椭圆的参数方程 $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,则有

$$\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)\mathrm{d}t=0.$$

【4253】 $\int_C (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一拱.

解 由题设知:$\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=a\sin t\mathrm{d}t$. 于是,

$$\int_C (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2t\sin t\mathrm{d}t=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

【4254】 $\oint_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 C 为依逆时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 利用圆的参数方程 $x=a\cos t,\ y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,则有

$$\oint_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-(a\cos t+a\sin t)a\sin t-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

【4255】 $\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$,其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$为顶点的正方形的围线.

提示 注意正方形各边的方程分别为

$$AB:y=1-x;\quad BC:y=1+x;\quad CD:y=-1-x;\quad DA:y=-1+x.$$

解 正方形各边的方程分别为

$$AB:y=1-x;\quad BC:y=1+x;\quad CD:y=-1-x;\quad DA:y=-1+x.$$

于是,

$$\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_{AB}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}+\int_{BC}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x+y}+\int_{CD}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x-y}+\int_{DA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x-y}$$

$$=\int_1^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^{-1}2\mathrm{d}x+\int_{-1}^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^1 2\mathrm{d}x=0.$$

【4256】 $\int_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$,其中 AB 为介于点 $A(0,\pi)$和点 $B(\pi,0)$之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y=\pi-x$. 于是,

$$\int_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\sin(\pi-x)\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x)\mathrm{d}x=0.$$

注 原题为 $\int_{AB}\mathrm{d}x\sin y+\mathrm{d}y\sin x$,若把它理解为 $\int_{AB}\mathrm{d}(x\sin y)+\mathrm{d}(y\sin x)$,其值仍为零,与原答案也符合.

【4257】 $\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$,其中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$,OnA 为直线段 $y=x$

解 如图 8.62 所示，我们有

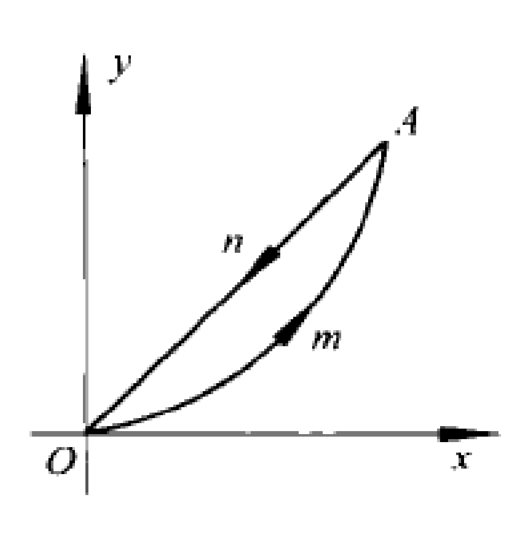


图 8.62

$$\oint_{OmAnO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx = \int_{OmA} \arctan \frac{y}{x} dy - dx + \int_{AnO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx$$

$$= \int_0^1 2x\arctan x dx - \int_0^1 dx + \int_1^0 (\arctan 1 - 1) dx$$

$$= x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - 1 + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) x \Big|_1^0$$

$$= \frac{\pi}{4} - (x - \arctan x) \Big|_0^1 - 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - 1$$

注 原题为 $\int_{OmAnO} dy\arctan \frac{y}{x} - dx$，若把它理解为

$$\int_{OmAnO} d\left(y\arctan \frac{y}{x}\right) - dx,$$

则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

【4258】 $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx$.

解 显然，$x dy + y dx = d(xy)$ 是全微分. 于是，

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

【4259】 $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x dx + y dy$.

解 显然，$x dx + y dy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ 是全微分. 于是，

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x dx + y dy = \int_{(0,1)}^{(3,-4)} d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{2} \Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12.$$

【4260】 $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy$.

解 显然，我们有

$$(x+y)dx + (x-y)dy = (y dx + x dy) + (x dx - y dy) = d(xy) + d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right) = d\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right),$$

即是全微分. 于是，$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,1)}^{(2,3)} d\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right) = \left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right) \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.$

【4261】 $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

解 显然，$(x-y)(dx-dy) = d\frac{(x-y)^2}{2}$ 是全微分. 于是，

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy) = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} d\frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2.$$

【4262】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解题思路 令 $F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u) du$. 注意

$$F'_x(x,y) = F'_y(x,y) = f(x+y), \quad 及 \quad dF(x,y) = f(x+y)(dx+dy),$$

即可获解.

解 令 $F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 连续，故

$$F'_x(x,y) = f(x+y), \quad F'_y(x,y) = f(x+y),$$

并且它们都是 x,y 的连续函数. 因此, $F(x,y)$ 可微, 且

$$\mathrm{d}F(x,y)=F'_x(x,y)\mathrm{d}x+F'_y(x,y)\mathrm{d}y=f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),$$

故 $f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 是全微分, 并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=F(a,b)-F(0,0)=\int_0^{a+b} f(u)\mathrm{d}u.$$

【4263】 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 显然, 当 $x\neq 0$ 时, $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}\right)$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\int_{(2,1)}^{(1,2)} \mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x}\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)}=-\frac{3}{2}.$$

【4264】 $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然, 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{(1,0)}^{(6,8)} \mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})=\sqrt{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,0)}^{(6,8)}=9.$$

【4265】 $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 由于 φ,ψ 是连续函数, 故显然有

$$\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}F(x)+\mathrm{d}G(y)=\mathrm{d}[F(x)+G(y)],$$

其中 $F(x)=\int_{x_1}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u, G(y)=\int_{y_1}^{y}\psi(v)\mathrm{d}v$. 从而, $\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$ 是函数 $F(x)+G(y)$ 的全微分, 于是,

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=[F(x)+G(y)]\Bigg|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=[F(x_2)+G(y_2)]-[F(x_1)+G(y_1)]$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)\mathrm{d}v.$$

【4266】 $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$.

解 $P=x^4+4xy^3$, $Q=6x^2y^2-5y^4$. 显然, P、Q 在全平面上具有连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域, 故在整个平面上表达式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并且线积分 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 因而, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y=\int_{-2}^{3}(x^4+4x\cdot 0^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}[6(-2)^2y^2-5y^4]\mathrm{d}y$$

$$=55+7=62.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{x^5}{5}\right)+2y^3\mathrm{d}(x^2)+2x^2\mathrm{d}(y^3)-\mathrm{d}(y^5)=\mathrm{d}\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right),$$

从而,

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y=\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62.$$

【4267】 $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P=-\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q=\frac{x}{(x-y)^2}$ $(x\neq y)$. 容易验证:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad (x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)|x>y\}$. 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分. 从而，在 Ω 上线积分 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\int_0^1\frac{-(-1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而，$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\frac{y}{x-y}\bigg|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$$

【4268】 $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 当 $x\neq 0$ 时，有

$$P=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},\quad Q=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega=\{(x,y)|x>0\}$. 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上必是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且可取

$$u(x,y)=\int_1^x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_\pi^y(\sin y+y\cos y)\mathrm{d}y=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\bigg|_1^x+y\sin y\bigg|_\pi^y=x-1+y\sin\frac{y}{x}.$$

于是，$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y=\left(x-1+y\sin\frac{y}{x}\right)\bigg|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1.$$

【4269】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)$.

解 显然，有 $\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)$，于是，

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)=(\mathrm{e}^x\cos y)\bigg|_{(0,0)}^{(a,b)}=\mathrm{e}^a\cos b-1.$$

【4270】 证明：若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为分段光滑的封闭曲线，则

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

证明思路 若能求得函数 $F(x,y)$，使 $\mathrm{d}F(x,y)=f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$（即 $F'_x(x,y)=xf(x^2+y^2)$，$F'_y(x,y)=yf(x^2+y^2)$），即可证明：

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=F(x,y)\bigg|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}=F(x_0,y_0)-F(x_0,y_0)=0,$$

其中 (x_0,y_0) 为 C 上任意取定的一点. 经过分析，易知 $F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(u)\mathrm{d}u$ 就是这样的函数.

证 令 $F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(u)\mathrm{d}u$. 由于 $f(u)$ 是连续函数，故

$$F'_x(x,y)=xf(x^2+y^2),\quad F'_y(x,y)=yf(x^2+y^2),$$

并且显然 $F'_x(x,y)$、$F'_y(x,y)$ 都是 x,y 的连续函数. 因此，$F(x,y)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y)=F'_x(x,y)\mathrm{d}x+F'_y(x,y)\mathrm{d}y=f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

于是，任取 C 上一点 (x_0,y_0)，有

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}=F(x_0,y_0)-F(x_0,y_0)=0.$$

证毕.

求原函数 z,设:

【4271】 $\mathrm{d}z=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}y.$

解 $z=\int_0^x(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+\int_0^y(0-0-y^2)\mathrm{d}y+C=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$

【4272】 $\mathrm{d}z=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}.$

解
$$z=\int_0^x\frac{y\mathrm{d}x}{3x^2-2xy+3y^2}+\int_1^y 0\mathrm{d}y+C=\frac{y}{3}\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8y^2}{9}}+C$$
$$=\frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}y}\arctan\frac{3\left(x-\frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y}\Bigg|_0^x+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+C_1.$$

【4273】 $\mathrm{d}z=\frac{(x^2+2xy+5y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}.$

解
$$z=\int_0^x\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{0-0+y^2}{(0+y)^3}\mathrm{d}y+C=\int_0^x\frac{(x+y)^2+4y^2}{(x+y)^3}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{y}+C$$
$$=[\ln|x+y|]\Big|_0^x-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\Big|_0^x+[\ln|y|]\Big|_1^y+C=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C_1.$$

【4274】 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x-y)+1]\mathrm{d}y.$

解
$$z=\int_0^x[(x-y+2)\mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x+\int_0^y(1-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+C$$
$$=[(x-y+1)\mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^x]\Big|_0^x+[y-y\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^y]\Big|_0^y+C=(x-y+1)\mathrm{e}^{x+y}+y\mathrm{e}^x+C_1.$$

【4275】 $\mathrm{d}z=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\mathrm{d}x+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\mathrm{d}y.$

提示 注意 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right).$

解 因为
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\mathrm{d}x+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right).$$

故有 $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C.$

【4276】 $\mathrm{d}z=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}y$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}.$

解 易知(当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^2},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2x^2}{r^4},\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2y^2}{r^4},$$

故(当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时)
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0. \tag{1}$$

令
$$P=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),\quad Q=-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,由(1)式知
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0.$$

因此，在任何不含原点(0,0)的单连通域中，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 都是某函数 z 的全微分，并且对上半平面的点(x,y)（即 $y>0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^y Q(0,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x-\int_1^y\left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0}\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0}-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0}$$

$$+\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}+C$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0}+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right)+C_1=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{x}{y}\right)+C_1=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)+C_1,$$

其中 $C_1=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}+C$ 是任意常数.

同理，对下半平面上的点(x,y)（即 $y<0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^y Q(0,y)\mathrm{d}y+C.$$

经过和前面完全类似的计算，可得 $z(x,y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)+C_2$，

其中

$$C_2=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{\substack{x=0\\y=-1}}+C$$

也是任意常数.

【4277】 证明下面的估计对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM,$$

式中 L 为积分路径的长，$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在弧 C 上）.

证明思路 首先注意到

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s,$$

其次，由 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2+(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2+Q^2$ 可知

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2 \quad 或 \quad |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M.$$

从而，命题易获证.

证 由于 $$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s,$$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2,$$

从而，$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$. 于是，

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_C \mathrm{d}s=LM.$$

【4278】 估计积分 $I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}$. 证明：$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

提示 注意在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有 $P^2+Q^2\leqslant\frac{16}{R^6}$，及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant\frac{4}{R^3}$，并利用 4277 题的结果.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}+\frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4}=\frac{16}{R^6}.$$

于是，$M\leqslant\frac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果，即得 I_R 的估计式：

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知：$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

计算沿空间曲线的积分(假定坐标系是右手的)：

【4279】 $\int_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，式中 C 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，以参数增加的方向为正.

解 $\int_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z=\int_0^1[(t^4-t^6)+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2]\mathrm{d}t=\int_0^1(3t^6-2t^4)\mathrm{d}t=\frac{1}{35}$.

【4280】 $\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，式中 C 为纽形螺线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，以参数增加方向为正.

解 $\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin t\sin t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t$

$$=\left(-\frac{at^2}{2}+\frac{a^2\sin 2t}{4}+abt\sin t+ab\cos t+ab\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\pi a^2.$$

【4281】 $\int_C(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2,y=x\tan\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$，若从 Ox 轴的正向看去，沿逆时针方向为正.

解 如图 8.63 所示. 利用球面的参数方程

$$x=a\cos\varphi\cos\psi,\ y=a\sin\varphi\cos\psi,\ z=a\sin\psi,$$

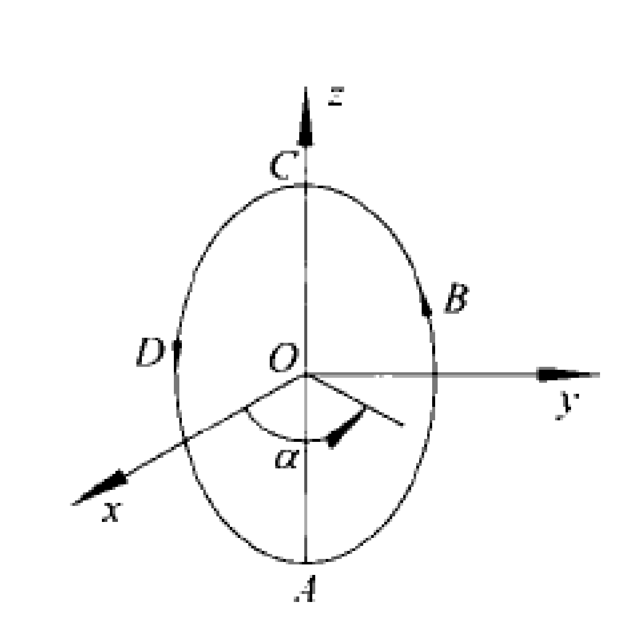


图 8.63

在$\overset{\frown}{ABC}$上，$\varphi=\alpha$，因而，有

$$x=a\cos\alpha\cos\psi,\qquad \mathrm{d}x=-a\cos\alpha\sin\psi\mathrm{d}\psi,$$
$$y=a\sin\alpha\cos\psi,\qquad \mathrm{d}y=-a\sin\alpha\sin\psi\mathrm{d}\psi,$$
$$z=a\sin\psi,\qquad \mathrm{d}z=a\cos\psi\mathrm{d}\psi,$$

且 $\int_{\overset{\frown}{ABC}}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$

$$=a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-(\sin\alpha\cos\psi-\sin\psi)\cos\alpha\sin\psi-(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi$$
$$+(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi)\cos\psi]\mathrm{d}\psi$$
$$=a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)d\psi=\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

在$\overset{\frown}{CDA}$上，$\varphi=\alpha+\pi$ 同样可得

$$\int_{\overset{\frown}{CDA}}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)\mathrm{d}\psi=\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

于是，最后得 $$\int_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

【4282】 $\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，式中 C 为维维亚尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2=ax$ $(z\geqslant 0,a>0)$，

若从 Ox 轴的正向（$x>0$）看去，沿逆时针方向为正.

解 柱面 $x^2+y^2=ax$ 可变为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，

故若令 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}=a\sin\frac{t}{2}.$$

从而，曲线的参数方程为 $x=\frac{a(1+\cos t)}{2},\quad y=\frac{a\sin t}{2},\quad z=a\sin\frac{t}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

于是，$\int_C y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}+\frac{a^3\cos^3\frac{t}{2}}{2}\right)dt$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos^2 t)d(\cos t)+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\,dt+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)d\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]\Big|_0^{2\pi}+a^3\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\pi a^3}{4}.$$

【4283】 $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中 C 为球面的一部分 $x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界，当沿着它的正向移动时，这部分球面的外侧面保持在左方.

解 边界在 Oxy 平面部分的方程为

$$x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi,\quad z=0\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性知，只要沿这部分计算线积分，再三倍之，便得要求的结果，即

$$\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)-\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi]d\varphi$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=3\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4.$$

计算下列全微分的曲线积分：

【4284】 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx+y^2\,dy-z^3\,dz$.

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx+y^2\,dy-z^3\,dz=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=-53\frac{7}{12}$.

【4285】 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0$.

【4286】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中点 (x_1,y_1,z_1) 位于球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上，而点 (x_2,y_2,z_2) 位于球 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 之上 $(a>0,b>0)$.

解 由题设知：$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2$，$x_2^2+y_2^2+z_2^2=b^2$.

于是，$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=b-a$.

【4287】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$，式中 φ,ψ,χ 为连续函数.

解 因为 $\varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz=d\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right)$，

故有 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)dx+\psi(x)dx+\chi(z)dz=\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u)\,du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v)\,dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(w)\,dw.$$

【4288】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z} f(u)\,du$. 由于 $f(u)$是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=f(x+y+z),\quad F'_y(x,y,z)=f(x+y+z),\quad F'_z(x,y,z)=f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$可微，且

$$dF(x,y,z)=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy+F'_z(x,y,z)dz=f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)=F(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,du-\int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)\,du=\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,du.$$

【4289】 $$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz),$$

式中 f 为连续函数.

解题思路 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v})\,dv$. 注意

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\quad F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\quad F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

及 $$dF(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz),$$

再令$\sqrt{v}=u$，即可得结果 $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,du$.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v})\,dv$. 由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\quad F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\quad F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$可微，且

$$dF(x,y,z)=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy+F'_z(x,y,z)dz=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f(\sqrt{v})\,dv^{*)}$$

$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,du,$$

*） 这里已作代换 $\sqrt{v}=u$ （$v=u^2$，$dv=2u\,du$）.

求原函数 u，若：

【4290】 $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

解 $$du=(x^2dx+y^2dy+z^2dz)-2(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)=d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right).$$

于是，$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$.

【4291】 $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$.

解 $$du=dx+\left(-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{1}{z}(y\,dx+x\,dy)-\frac{xy}{z^2}dz$$

$$=dx+\left(-\frac{1}{y}dx+xd\left(-\frac{1}{y}\right)\right)+\frac{1}{z}d(xy)+xyd\left(\frac{1}{z}\right)=dx+d\left(-\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$=\mathrm{d}\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

于是，$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$

【4292】 $\mathrm{d}u=\frac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$

解 由于

$$\begin{aligned}&(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z\\&=(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+(x+y)\mathrm{d}z-z(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\mathrm{d}[(x^2+y^2+2xy)+z^2]+(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y),\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2+z^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln[(x+y)^2+z^2]+\mathrm{d}\left(\arctan\frac{z}{x+y}\right)\\&=\mathrm{d}\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}\right].\end{aligned}$$

于是，$u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}+C.$

【4293】 求当质量为 m 的点从位置(x_1,y_1,z_1)移动到位置(x_2,y_2,z_2)时，重力所作的功(Oz 轴的方向是竖直向上).

解 设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为各坐标轴上的单位矢量，则重力 $\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{k}$，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$. 从而，功的微分为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-mg\mathrm{d}z=\mathrm{d}(-mgz).$$

于是，重力所作的功为 $A=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}-mg\mathrm{d}z=(-mgz)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=-mg(z_2-z_1).$

【4294】$^{+}$ 弹性力指向坐标原点，力的大小与质点到坐标原点的距离成正比. 设此点依逆时针方向描绘出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正四分之一，求弹性力所作的功.

解 弹性力 $\boldsymbol{F}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$，其中 k 为弹性系数. 功的微分为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j})=-k(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left[-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\right].$$

于是，弹性力所作的功为

$$A=-k\int_{(a,0)}^{(0,b)}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

【4295】$^{+}$ 当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$时，求引力 $F=\frac{G}{r^2}$(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)对它所作的功，其中 G 是引力常量.

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad\cos\beta=-\frac{y}{r},\quad\cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

而引力的投影为 $$X=-\frac{Gx}{r^3},\quad Y=-\frac{Gy}{r^3},\quad Z=-\frac{Gz}{r^3}.$$

于是，引力所作的功为

$$\begin{aligned}A&=-G\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{r^3}=-\frac{G}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\\&=k\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\frac{1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right).\end{aligned}$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标.

§12. 格林公式

1° **曲线积分与二重积分的关系** 设 C 为分段光滑的简单封闭围线，它围成单连通的有界区域 S，并且当沿着围线正方向移动时，区域 S 保持在左边；此外，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 及其一阶偏导数 $P'_y(x,y)$，$Q'_x(x,y)$ 在区域 S 内及其边界上皆是连续的，则成立格林公式

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若把区域 S 的边界 C 理解为一切边界围线之和，并且这样选取沿围线的环绕方向，使得区域 S 始终位于左边，则公式(1)对于由几个简单围线围成的有界区域 S 也成立.

2° **平面区域的面积** 以分段光滑的简单围线 C 为界的图形的面积 S 等于：

$$S=\oint_C x\mathrm{d}y=-\oint_C y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x.$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点)，并这样选取围线的正方向，使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

【4296】 利用格林公式变换曲线积分

$$I=\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y$$

式中围线 C 是有界区域 S 的边界.

解 此处 $P=\sqrt{x^2+y^2}$，$Q=xy^2+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

从而，
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2.$$

于是，
$$I=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 这里应假定 C 不与 Ox 轴的左半部分(即 $x\leqslant 0, y=0$)相交，从而，这时在 S 中 $x+\sqrt{x^2+y^2}>0$.

【4297】 应用格林公式，计算曲线积分

$$I=\oint_k (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y,$$

其中 k 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形围线 ABC，并且积分时的环绕方向为正. 直接计算积分，以验证所求得的结果.

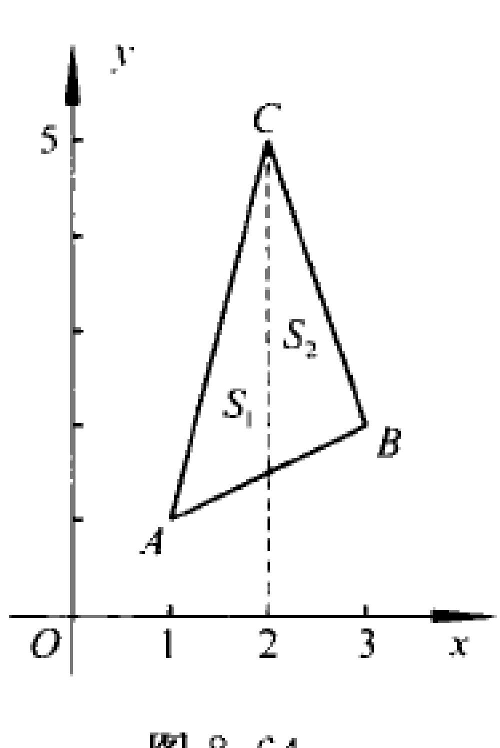


图 8.64

解 如图 8.64 所示. AB，BC 及 CA 的方程分别为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-3x+11,\quad y=4x-3.$$

由于 $P=(x+y)^2$，$Q=-(x^2+y^2)$. 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴，它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分. 于是，

$$\begin{aligned}I&=\iint_S(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.\end{aligned}$$



如果直接计算，则

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

$$=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]dx+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)$$

$$\cdot(x^2+9x^2-66x+121)]dx+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)dx+\int_3^2(34x^2-242x+484)dx+\int_2^1(-43x^2+66x-27)dx$$

$$=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\frac{2}{3}.$$

应用格林公式,计算下列曲线积分:

【4298】 $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$,式中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 由于 $P=-x^2y,Q=xy^2$,故有

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算,可令 $x=a\cos t,y=a\sin t$,则

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=a^4\int_0^{2\pi}(\cos^2t\sin^2t+\cos^2t\sin^2t)dt=\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^22tdt=\frac{\pi a^4}{2}.$$

【4299】 $\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$, 式中 C 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $P=x+y,Q=-(x-y)$,故有

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}(-1-1)dxdy=-2\pi ab.$$

如果直接计算,则

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-b\sin t)(b\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t-ab]dt=-2\pi ab.$$

【4300】 $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$,其中 C 为区域 $0<x<\pi,0<y<\sin x$ 的边界,并且积分时的围绕方向为正.

解 由于
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x(\sin y-y)-e^x\sin y=-ye^x,$$

故有
$$\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\sin x}}ye^xdxdy=-\int_0^\pi e^xdx\int_0^{\sin x}ydy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2xdx=-\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^xdx-\int_0^\pi e^x\cos2xdx\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(e^\pi-1)-\frac{\cos2x+2\sin2x}{5}e^x\Big|_0^\pi\right]=-\frac{1}{5}(e^\pi-1).$$

【4301】 $\oint_{x^2+y^2=R^2}e^{-(x^2+y^2)}(\cos2xydx+\sin2xydy)$.

解 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-(x^2+y^2)}[(-2x\sin2xy+2y\cos2xy)-(2y\cos2xy-2x\sin2xy)]=0$,

故有
$$\oint_{x^2+y^2=R^2}e^{-(x^2+y^2)}(\cos2xydx+\sin2xydy)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}0dxdy=0.$$

【4302】 设 AmB 为连接点 $A(1,1)$和点 $B(2,6)$的直线段,AnB 是连接点 A,B 及坐标原点的抛物线

段，且该抛物线的轴垂直于 x 轴．积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$$

相差多少？

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x-y)-2(x+y)=-4x,$$

故 I_1 与 I_2 之差为(利用格林公式)

$$I_2-I_1=\oint_{AnBmA}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y=\iint_S(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2x^2-x}^{5x-4}(-4x)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_1^2 4x(-2x^2+6x-4)\mathrm{d}x=(2x^4-8x^3+8x^2)\Big|_1^2=-2,$$

或 $I_1-I_2=2$.

【4303】 计算曲线积分 $\displaystyle\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

提示 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$，这样，便构成封闭的半圆形 $AmOA$，利用格林公式即易获解.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$，这样，便构成封闭的半圆形 $AmOA$，且在线段 OA 上，

$$\int_{OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0.$$

从而，$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}$．另一方面，利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

于是，

$$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4304】 计算曲线积分 $\displaystyle\int_{AmB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$,

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AmB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任意路径，但要求此路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AmBA$.

提示 连接点 B 与点 A，构成封闭围线 $AmBA$，利用格林公式并注意

$$\int_{BA}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\int_{BA}\mathrm{d}[\mathrm{e}^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(y\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

即易获解．利用此题的结果可计算 4303 题.

解 首先，我们有 $\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA}$，而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\iint_S m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=mS.$$

另一方面，

$$\int_{BA}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y=\int_{BA}\mathrm{d}[\mathrm{e}^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(y\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$=\mathrm{e}^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1)-\mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2)-m\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_1-x_2)+\frac{m}{2}\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2$$

$$=\mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1)-\mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

于是，

$$\int_{AmB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$$

$$=mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

注 利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上,由于 $\varphi(y)=\sin y, x_1=a,\ y_1=0,\ x_2=y_2=0,\ S=\frac{\pi a^2}{8}$,代入即得

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4305】* 求二阶可微的两个连续函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$,使得曲线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$$

对于任何封闭的围线 C 与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式,得

$$I=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]dxdy=\tau. \tag{1}$$

由假定 τ 为一常数,它与 α、β 无关(只与围线 C 有关),上式中的 S 表围线 C 所围成的闭区域. 由假定 P,Q 具有连续的二阶偏导数,故(1)式中二重积分的被积函数具有关于 α、β 的一阶连续偏导数. 因此,可以在积分号下关于 α、β 求偏导数,得

$$\iint_S\left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\right]dxdy=\frac{\partial}{\partial\alpha}\tau=0. \tag{2}$$

$$\iint_S\left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\right]dxdy=\frac{\partial}{\partial\beta}\tau=0. \tag{3}$$

于是,(2)式和(3)式对任何 α、β 以及任何 S 都成立. 再注意到(2)式和(3)式中二重积分的被积函数都是连续的,故被积函数必恒为零(参看 4097 题,此题对二重积分也成立):

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\equiv0. \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\equiv0. \tag{5}$$

(对任何 x,y,α,β). 记 $x+\alpha=u, y+\beta=v$,显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2},\qquad \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u},\qquad \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2},$$

于是,(4)式与(5)式为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v}\equiv0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}\equiv0$$

(对任何 u,v),由此可知: $\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\equiv k$ (常数).

将 u,v 改记为 x,y 则上式为

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv k\ (常数). \tag{6}$$

令 $u(x,y)=\int_0^x P(t,y)dt$,则 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数,且

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y). \tag{7}$$

由(6)式知: $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=k+\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=k+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)=k+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right).$

两端积分,得

$$Q(x,y)=kx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\varphi(y),\tag{8}$$

其中 $\varphi(y)$ 为具有二阶连续导数的任意函数. 由(7)、(8)两式又知 $u(x,y)$ 具有连续的三阶偏导数.

反之,若 $u(x,y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数,而 $\varphi(y)$ 是任一具有二阶连续导数的函数,则由(7)式和(8)式确定的 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 必具连续二阶偏导数,且使(6)式成立,从而使

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}y=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=kS,$$

故 I 是与 α、β 无关的常数(对于任意固定的 C).

综上所述,可知:使曲线积分 I 对于任何封闭围线 C 与常数 α、β 无关的二阶连续可微函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 的全体由公式(7)与(8)给出,其中 k 为常数,$u(x,y)$ 为三阶连续可微的任一函数,$\varphi(y)$ 为二阶连续可微的任意一个一元函数.

【4306】 为了使曲线积分 $\int_{AmB}F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与积分路径的形状无关,可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件?

解 由于 $P=yF(x,y)$, $Q=xF(x,y)$,故由格林公式知所求的条件为 $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)]$,

即
$$xF'_x(x,y)=yF'_y(x,y).$$

【4307】 计算
$$I=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 C 为不经过坐标原点的简单封闭围线,且积分时的环绕方向为正.

提示 研究两种情况:(1)坐标原点在围线 C 之外,(2)围线 C 包围坐标原点.

解 令 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$. 易知,当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外,这时,在由 C 围成的有界闭区域 S 上,P 与 Q 以及它们的偏导数都连续,故可应用格林公式,得

$$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点. 这时,由于 P,Q 在原点无定义,故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式. 今取 $a>0$ 充分小,使中心在原点半径为 a 的圆周 L_a (L_a: $x^2+y^2=a^2$)完全位于围线 C 之内. 用 S_a 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然,在 S_a 上,P、Q 及其偏导数均连续,故可应用格林公式,得

$$\left(\oint_C+\oint_{-L_a}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向(即顺时针方向).

于是,$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,其中 L_a 沿正方向(即逆时针方向). 利用 L_a 的参数方程 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$即得

$$I=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积:

【4308】 椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 面积为
$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=\pi ab.$$

【4309】 星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=b\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 面积为 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi ab.$

【4310】 抛物线 $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$ 和轴 Ox.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 及 $(0,0)$.

注意在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上，有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；而在抛物线这一段上，则有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{(1+t)^4}\mathrm{d}t\ (0\leqslant t\leqslant+\infty),$$

从而，问题易获解.

解 作代换 $y=tx$，则原方程化为 $x^2(1+t)^2=ax$. 从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 与 $(0,0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上，有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

在抛物线上，有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{(1+t)^4}\mathrm{d}t.$$

于是，面积为 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^4}=-\frac{a^2}{6}\frac{1}{(1+t)^3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}.$

【4311】 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ (0\leqslant t\leqslant+\infty),$$

且有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$ $(0\leqslant t\leqslant+\infty)$. 从而，问题可获解.

解 作代换 $y=tx$，则得曲线的参数方程为 $x=\frac{3at}{1+t^3}$，$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

由于 $\mathrm{d}x=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，从而，$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$.

于是，面积为 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$

【4312】 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解题思路 利用极坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，得双纽线的方程为 $r^2=a^2\cos2\varphi$，故有

$$x=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}.$$

及在曲线上，$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=a^2\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi$；在 Ox 轴上，$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$.

注意，对应于 $\frac{1}{4}$ 的面积（第一象限内）部分有 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. 从而，问题易获解.

解 考虑到对称性，只需求曲线所围的区域的 $\frac{1}{4}$ 面积（位于第一象限）. 利用极坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，得双纽线的方程为 $r^2=a^2\cos2\varphi$，故

$$x=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}.$$

从而，在曲线上 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=a^2\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi$；在 Ox 轴上，$x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=0$，且 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是，面积为

$$S=4\,\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi=a^2.$$

【4313】 曲线 $x^3+y^3=x^2+y^2$ 及坐标轴.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{1+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{t(1+t^2)}{1+t^3}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

曲线的起点为(1,0)，终点为(0,1). 注意在曲线段上，有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\quad(0\leqslant t<+\infty);$$

而在 Oy 轴上从点(0,1)到点(0,0)一段，以及在 Ox 轴上从点(0,0)到点(1,0)的一段上，均有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 再注意利用 3853 题的结果，问题即可获解.

解 作代换 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{1+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{t(1+t^2)}{1+t^3}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

曲线的起点为(1,0)，终点为(0,1). 在曲线段上，

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

在 Oy 轴上从点(0,1)到(0,0)一段，以及在 Ox 轴上从点(0,0)到点(1,0)一段上，均有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 于是，面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t+2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(2-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\mathrm{B}(1,1)+\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},2-\frac{1}{3}\right)\right]^{*)}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

*) 利用 3853 题的结果.

【4314】 计算由曲线 $(x+y)^{n+m+1}=ax^ny^m$ $(a>0,n>0,m>0)$ 所围的面积.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}},\quad y=\frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

注意 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}\mathrm{t}$ $(0\leqslant t<+\infty)$，并利用 3852 题的结果，问题即可获解.

解 作代换 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}},\quad y=\frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

从而，

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}\mathrm{d}t\quad(0\leqslant t<+\infty)$$

于是，面积为 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m+1,2n+1)^{*)}$.

*) 利用 3852 题的结果.

【4315】 计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ $(a>0,b>0,n>0)$ 和坐标轴所围的面积.

解题思路 令 $x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，即得

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{n}ab\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\text{（在曲线上）}.$$

曲线与坐标轴交于点$(a,0)$及点$(0,b)$. 注意在Oy轴上从点$(0,b)$到点$(0,0)$的一段，以及在Ox轴上从点$(0,0)$到点$(a,0)$的一段上，均有$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 再注意利用3856题的结果，问题即可获解.

解 作代换$x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，即得

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点$(a,0)$和点$(0,b)$. 在Oy轴上，从点$(0,b)$到点$(0,0)$一段，以及在Ox轴上从点$(0,0)$到点$(a,0)$一段上，显然有$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

*) 利用3856题的结果.

【4316】 计算由曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$ $(a>0,b>0,n>1)$和坐标轴所围的面积.

解题思路 令$y=\frac{b}{a}xt$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n},\quad y=\frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n}\ (0<t<+\infty).$$

易知在两坐标轴上，有$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；及在曲线上，有$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=ab\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t$ $(0<t<+\infty)$. 并利用3853题的结果，问题即可获解.

解 作代换$y=\frac{b}{a}xt$即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n},\quad y=\frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n}\ (0<t<+\infty).$$

易知
$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=ab\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t.$$

又在两坐标轴上，显然有$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 于是，面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{ab}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{ab}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t+2\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)^2}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\mathrm{B}(1,1)+\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\right]^{*)}\\&=\frac{ab}{n}\left[1+\mathrm{B}\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{ab}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\right]=\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right].\end{aligned}$$

*) 利用3853题的结果.

【4317】 计算由曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$ $(a>0,b>0,c>0,n>0)$ 所围的面积.

提示 仿4316题.

解 作代换$y=\frac{b}{a}xt$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{act^n}{1+t^{2n+1}},\quad y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

易知$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t$. 于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t=-\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

【4318】 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周外部滚动而无滑动，动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线．假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数($n\geqslant 1$)，求外摆线所围的面积．研究特殊情况 $r=R$（心脏线）．

解 取定圆的中心 O 作坐标原点，取 Ox 轴通过点 A，点 A 是动点的始点，即为两圆的公切点时的位置（图 8.65）．当动圆滚到如图的新位置时，点 A 移到点 M．动点 M 的轨迹便是外摆线，其方程推导如下：设动圆的圆心为 C，两圆的切点为 B，记 $\angle MCB=t$（运动开始时，设 t 等于零）．切点在定圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 应等于它在动圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{MB}$，即

$$R\cdot\angle AOB=\frac{R}{n}\cdot\angle MCB=\frac{R}{n}t.$$

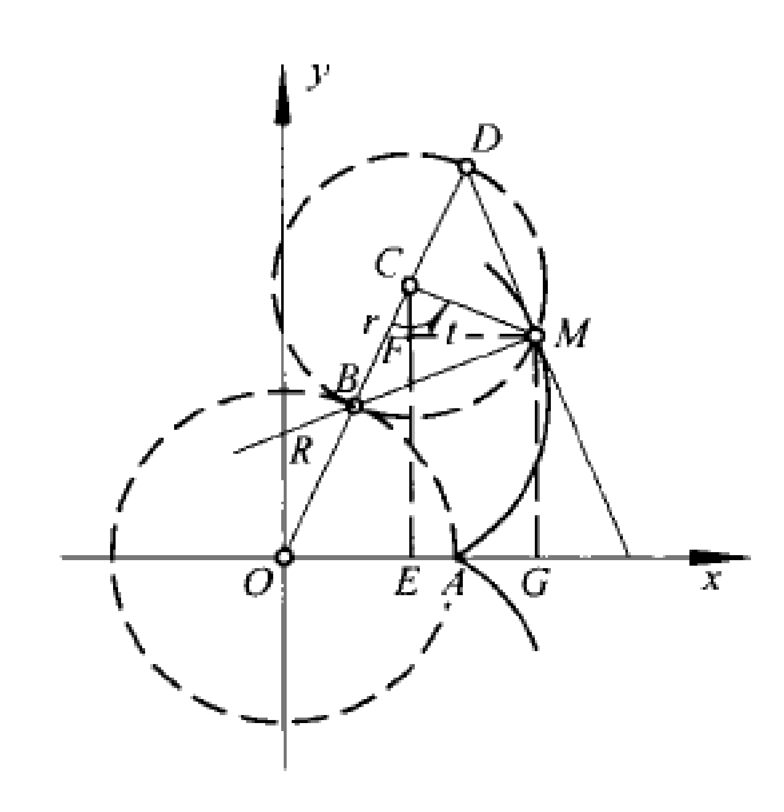


图 8.65

从而，$\angle AOB=\frac{t}{n}$，设动点 M 的坐标为 (x,y)，则

$$x=OG=OE+FM=\left(R+\frac{R}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\sin\angle FCM,$$

但 $\angle FCM=\angle BCM-\angle OCE$，且 $\angle OCE=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{n}$，从而，

$$\angle FCM=\left(1+\frac{1}{n}\right)t-\frac{\pi}{2},\quad \sin\angle FCM=-\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

于是，最后得 $\quad x=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$

类似地，可求得 $\quad y=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$

若记 $\varphi=\frac{t}{n}$，并注意到 $R=nr$，则外摆线可用如下的参数方程表示：

$$x=(n+1)r\cos\varphi-r\cos(n+1)\varphi,\quad y=(n+1)r\sin\varphi-r\sin(n+1)\varphi.$$

由 $R=nr$ 知，当动圆滚 n 圈后，起点与终点重合，即 φ 的变化范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$．注意到

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=r^2(n+1)(n+2)(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

于是，所求的面积为 $\quad S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{r^2(n+1)(n+2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi=\pi r^2(n+1)(n+2).$

特别是，当 $r=R$ 时，即 $n=1$，则得心脏线的面积为 $S=6\pi r^2$．

【4319】 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周内部滚动而无滑动，动圆周上的一点所描绘的曲线称为内摆线．假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数($n\geqslant 2$)，求内摆线所围的面积．研究特殊情况 $r=\frac{R}{4}$（星形线）．

解 仿上题，容易求得内摆线的参数方程为

$$x=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\cos\left(1-\frac{1}{n}\right)t.\quad y=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)t.$$

若以 $\varphi=\frac{t}{n}$ 为参数，并注意到 $R=nr$，则得

$$x=(n-1)r\cos\varphi+r\cos(n-1)\varphi,\qquad y=(n-1)r\sin\varphi-r\sin(n-1)\varphi.$$

注意到 $$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=r^2(n-1)(n-2)(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

于是，所求的面积为 $\quad S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{r^2(n-1)(n-2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi=\pi r^2(n-1)(n-2).$

特别是，当 $\frac{R}{r}=4$ 时，即 $n=4$，则得星形线所围的面积为 $S=6\pi r^2$．

【4320】 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截那部分的面积．

解 两曲面的交线为 $\qquad x^2+y^2=ax,\qquad z^2=a^2-ax.$

若将平面 Oxy 上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 记以 C，其弧长记以 s，则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}s.$$

由于 $x^2+y^2=ax$ 即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\qquad y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而，弧长的微分为 $ds=\frac{a}{2}d\varphi$. 于是，面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}d\varphi=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

【4321】 计算
$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2},$$
若 $X=ax+by, Y=cx+dy$，且 C 为包围坐标原点的简单封闭围线（$ad-bc\neq0$）.

解 首先注意，由于 $ad-bc\neq0$，故只有原点(0,0)使 $X^2+Y^2=0$. 易知

$$XdY-YdX=(ax+by)(cdx+ddy)-(cx+dy)(adx+bdy)=(ad-bc)(xdy-ydx),$$

故
$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中
$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},\qquad Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}\quad((x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{C'}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点(0,0)的任一位于 C 内的围线. 特别是，可取 C' 为围线 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2$（即 $X^2+Y^2=r^2$），$r>0$ 充分小. 于是，得（利用格林公式）

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}XdY-YdX=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}xdy-ydx\\&=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}2dxdy=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|dXdY.\end{aligned}$$

由于 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=ad-bc$，故 $\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}=\frac{1}{ad-bc}$. 于是，代入上式得

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\frac{1}{|ad-bc|}dXdY=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{1}{|ad-bc|}\pi r^2=\operatorname{sgn}(ad-bc).$$

【4322】 若简单的围线 C 包围坐标原点，$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$，而曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在围线 C 以内有几个单交点，计算积分 I（参阅 4321 题）.

解 设 $\varphi(x,y)=0,\psi(x,y)=0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$. 首先注意，本题应假定函数 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数，并且在各点 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 处有 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x\neq0$. 容易算得

$$XdY-YdX=(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)dx+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)dy,$$

从而，

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中

$$P=\frac{\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi}{\varphi^2+\psi^2},\qquad Q=\frac{\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy}-\varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)-(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)\varphi^2+(\varphi'_y\psi'_x+\varphi'_x\psi'_y)\psi^2+2(\varphi'_x\varphi'_y-\psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]$$

$$((x,y)\neq(x_i,y_i)\ (i=1,2,\cdots,m)).$$

围绕点 $P_i(x_i,y_i)$ 作围线 C_i：$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2$（即 $X^2+Y^2=r^2$），取 $r>0$ 充分小，使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内（这是办得到的，因为在各点 P_i，$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$. 从而，由连续性知，在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$ 且保持定号. 于是，根据隐函数存在定理知，变换 $X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$ 在点 $(x,y)=(x_i,y_i)$ 邻近及点 $(X,Y)=(0,0)$ 邻近是双方单值双方连续的），并使 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2+Y^2\leqslant r^2$（记为 S_i）上保持定号，将格林公式应用于诸围线 $C,C_1,\cdots,C_m$ 之间的区域，可得

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}. \tag{1}$$

但
$$\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_C X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{1}{r^2}\oint_{C_i}(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{S_i}2(\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{S_i}\left|\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\cdot\pi r^2=2\pi\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

代入(1)式，即得
$$I=\sum_{i=1}^{m}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

或写为
$$I=\sum\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)},$$

其中 $\sum$ 的是对曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 在 C 内的各交点相加.

注 显然，4321 题是 4322 题的特例. 这时，曲线 $ax+by=0$ 与 $cx+dy=0$ 在 C 内只有一个交点，即原点 $(0,0)$，而 $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

【4323】 证明：若 C 为封闭围线，$\boldsymbol{l}$ 为任意的方向，则有

$$\oint_C\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=0,$$

式中 n 为围线 C 的外法向量.

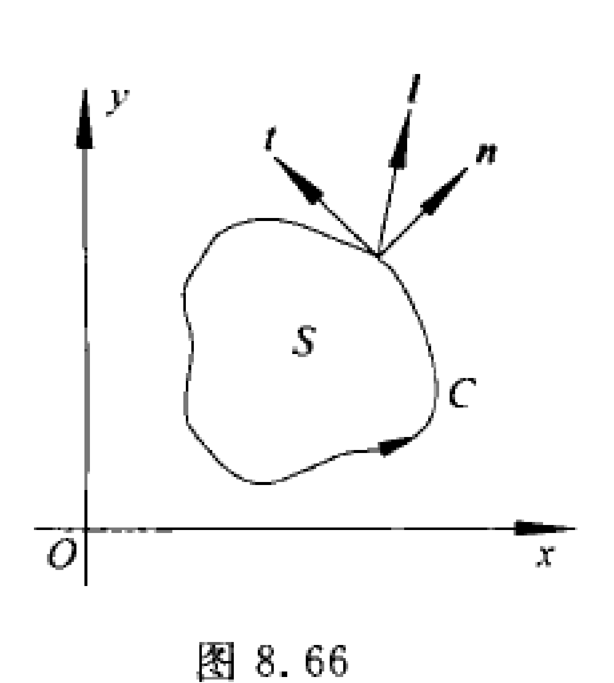


图 8.66

证 如图 8.66 所示. 不妨规定 C 的方向为逆时针的，以 t 表示. 由于夹角

$$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l},x)-(\boldsymbol{n},x),$$

故得
$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{l},x)\cos(\boldsymbol{n},x)+\sin(\boldsymbol{l},x)\sin(\boldsymbol{n},x).$$

但是，
$$\sin(\boldsymbol{n},x)=\sin\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{t},x),$$

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\cos\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{t},x),$$

且 $\cos(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$，　$\sin(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$，因此，有

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x.$$

再利用格林公式，并注意到 $\sin(\boldsymbol{l},x)$ 和 $\cos(\boldsymbol{l},x)$ 均为常数，即得

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_C [-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x+\cos(\boldsymbol{l},x)]\mathrm{d}y=\iint_S 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

【4324】 求积分 $$I=\oint_C [x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s$$

之值，式中 C 为有界区域 S 的边界，它是简单封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为它的外法向量.

解 如 4323 题所述，已知

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\cos\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

$$\cos(\boldsymbol{n},y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\boldsymbol{n},x)\right]=\sin(\boldsymbol{n},x)=\sin\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{t},x)=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

于是， $$I=\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2S,$$

这里 S 为封闭曲线 C 所围的面积.

【4325】 求 $$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s,$$

其中 S 为包围点 (x_0,y_0) 的围线 C 所围的面积，$d(S)$ 为区域 S 的直径，$\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的单位外法向量，$\boldsymbol{F}\{X,Y\}$ 为 $S+C$ 上的连续可微向量.

解 由 4323 题的推导过程中知，向量 $\boldsymbol{n}$ 在坐标轴上的投影为

$$n_x=\cos(\boldsymbol{n},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\quad n_y=\cos(\boldsymbol{n},y)=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

于是， $$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=(Xn_x+Yn_y)\mathrm{d}s=X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x.$$

因此，利用格林公式有

$$\oint_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_C X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_{(\xi,\eta)}\cdot S,$$

其中点 $(\xi,\eta)\in$ 区域 S. 于是，

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\lim_{d(S)\to 0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_{(\xi,\eta)}=X'_x(x_0,y_0)+Y'_y(x_0,y_0).$$

§ 13. 曲线积分在物理学上的应用

【4326】 均匀分布在圆 $x^2+y^2=a^2$，$y\geqslant 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引位于 $(0,0)$ 质量为 m 的质点？

解 由对称性知，引力在 Ox 轴上的投影 $X=0$，故只要计算引力在 Oy 轴上的投影.

设圆心角为 θ，由 $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\theta$ 知，对于长为 $\mathrm{d}s$ 一段圆弧吸引质量为 m 的质点的力在 Oy 轴上的投影为

$$\mathrm{d}Y=\frac{km\dfrac{M}{\pi a}}{a^2}\sin\theta\cdot a\mathrm{d}\theta=\frac{kmM}{\pi a^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

其中 k 为引力常数.

于是，所求的引力在 Oy 轴上的投影为

$$Y=\frac{kmM}{\pi a^2}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

【4327】 计算单层的对数势 $$u(x,y)=\oint_C \kappa\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}s,$$

式中 $\kappa=$ 常数，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，设围线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

解 由对称性知，单层的对数势为

$$u(x,y)=2\kappa\int_0^\pi \ln\frac{1}{r}\cdot R\mathrm{d}\theta=2R\kappa\int_0^\pi \ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-R\kappa\int_0^\pi \ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\xi x+\eta y=R\rho\cos\theta$，而 θ 是向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{r}_i=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}$ 的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果，可得

$$\int_0^\pi \ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & \rho\leqslant R,\\ 2\pi\ln\dfrac{\rho}{R}, & \rho>R.\end{cases}$$

于是，我们有 $u(x,y)=-2R\kappa\int_0^\pi \ln R\mathrm{d}\theta-R\kappa\int_0^\pi \ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{R}, & \rho\leqslant R,\\ 2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{\rho}, & \rho>R.\end{cases}$

【4328】 采用极坐标 ρ 和 φ，计算单层的对数势

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\psi \quad 和 \quad I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\psi,$$

式中 r 为点 (ρ,φ) 与动点 $(1,\psi)$ 间的距离，m 为正整数.

解 由于

$$r=\sqrt{(\rho\cos\varphi-\cos\psi)^2+(\rho\sin\varphi-\sin\psi)^2}=\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

于是，当 $\rho<1$ 时，我们有

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]\mathrm{d}\psi=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos m\varphi\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin m\varphi\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u.$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以 2π 为周期的函数，并注意到奇偶函数在对称区间上的积分性质，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u+\frac{\sin m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi^{*)}.$$

同理，我们有

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]\mathrm{d}\psi=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{\cos m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u-\sin m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

$$=-\sin m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi.$$

当 $\rho>1$ 时，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln\rho^2\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}u=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi^{**)}$$

同理，我们有 $I_2=-\sin m\varphi\int_0^\pi \cos mu\ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}u=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi.$

对于 $\rho=0$，显然有 $I_1=I_2=0.$

现在来研究当 $\rho=1$ 的情况. 首先，积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

对于 ρ 在区间$[1,1+\delta]$上是一致收敛的，其中 δ 为很小的正数. 事实上，对于充分小的 η，当 u 在$(0,\eta)$内取值时，有

$$1>1-2\rho\cos u+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos u)\geqslant 2(1-\cos u)>0.$$

于是，当 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$，$u\in(0,\eta)$时，有

$$|\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)|\leqslant|\ln 2(1-\cos u)|.$$

而积分 $\int_0^\eta |\ln 2(1-\cos u)|\mathrm{d}u$ 是收敛的. 这是由于当 $0<2\beta<1$，有

$$\lim_{u\to+0}u^{2\beta}|\ln 2(1-\cos u)|=\lim_{u\to+0}-[2(1-\cos u)]^\beta\ln[2(1-\cos u)]\frac{u^{2\beta}}{2^\beta(1-\cos u)^\beta}=0\cdot 1=0.$$

于是，积分
$$\int_0^\eta \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛，故知积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\mathrm{d}u$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛，从而，I_1 作为参数 $\rho=1$ 的函数在 $\rho=1$ 是右连续的. 由此，根据上面已求出 $\rho>1$ 时 $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$，得知：当 $\rho=1$ 时，

$$I_1=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi=\frac{\pi}{m}\cos m\varphi.$$

同理，可得
$$I_2=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi=\frac{\pi}{m}\sin m\varphi.$$

综上所述，得
$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi,\qquad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1;$$

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi,\qquad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi,\quad \rho>1.$$

*） 参看 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的“函数表与积分表”3.765 公式 1.

**） 根据上面公式，当 $p^2>1$ 时，有

$$\int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\cos\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \ln p^2\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi 2\ln p\cdot\cos\alpha x\mathrm{d}x+\int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{\alpha}p^{-\alpha},$$

其中 α 为正整数.

【4329】 计算高斯积分
$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s,$$

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度，此向量连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$，$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$为向量 $\boldsymbol{r}$ 与曲线 C 在点 M 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

解 设 $\boldsymbol{n}$ 与 Ox 轴的夹角为 α，$\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴的夹角为 β，则$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\alpha-\beta$. 于是，

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha.$$

代入高斯积分，得

$$u(x,y)=\oint_C\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}\mathrm{d}\eta-\frac{\eta-y}{r^2}\mathrm{d}\xi.$$

令 $P=-\frac{\eta-y}{r^2}$，$Q=\frac{\xi-x}{r^2}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},\qquad\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P、Q 的偏导数除去点 A(此处 $r=0$)外，在全平面上是连续的，并且$\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial P}{\partial \eta}$. 于是，利用格林公式知：当点 A 在曲线 C 之外时，有

$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时，则在曲线 C 内以 A 为圆心，R 为半径作一圆 l，即得

$$u(x,y)=\oint_l \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_l \frac{1}{R}\mathrm{d}s=2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时，不妨利用关系式 $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\mathrm{d}\varphi$ *)，其中 $\mathrm{d}\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 $\mathrm{d}s$ 所张的角度. 今以 A 为圆心，r_1 为半径作一小圆，交 C 于 B_1 及 B_2 两点，将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\widehat{B_1B_2}$，则有

$$\int_{\widehat{B_1B_2}} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\int_{\widehat{B_1B_2}}\mathrm{d}\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有
$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim_{r_1\to+0}\int_{\widehat{B_1B_2}} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.$$

综上所述，得高斯积分
$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外},\\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上},\\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内}.\end{cases}$$

*) 参看 Γ. M. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

【4330】 采用极坐标系 ρ 和 φ，计算双层的对数势

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}\psi \quad 和 \quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho,\varphi)$ 和动点 $M(1,\psi)$ 之间的距离，$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为方向 $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}$ 与引自点 $O(0,0)$ 的半径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{n}$ 之间的夹角，m 为正整数.

解 由题意知：

$$\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}=\frac{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)\cos\psi+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)^2+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)^2}=\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}.$$

从而，当 $\rho=1$ 时，$\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}=\frac{1}{2}$. 又因 m 为正整数，故此时有

$$K_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\mathrm{d}\psi=0,\quad K_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi\mathrm{d}\psi=0.$$

当 $\rho<1$ 时，因为级数(利用 2968 题的结果)

$$\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)$$

在$[0,2\pi]$上一致收敛，乘 $\cos m(\psi-\varphi)$ 和 $\sin m(\psi-\varphi)$ 以后在$[0,2\pi]$上也一致收敛，故可逐项积分. 于是，

$$\begin{aligned}K_1&=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\mathrm{d}\psi\\&=\int_0^{2\pi}[\cos m(\psi-\varphi)\cos m\varphi-\sin m(\psi-\varphi)\sin m\varphi]\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)\right]\mathrm{d}\psi\\&=\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos m(\psi-\varphi)\rho^m\cos m(\psi-\varphi)\mathrm{d}\psi\\&=\rho^m\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2 m(\psi-\varphi)\mathrm{d}\psi=\pi\rho^m\cos m\varphi.\end{aligned}$$

同理，容易求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}\mathrm{d}\psi=\pi\rho^m\sin m\varphi.$$

当 $\rho>1$ 时，我们有

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]+(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{(1-r^2)+[1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi=-\pi r^m\cos m\varphi=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi,$$

其中 $r=\rho^{-1}<1$.

同理,可求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi.$$

综上所述,得

$$K_1=\pi\rho^m\cos m\varphi,\quad K_2=\pi\rho^m\sin m\varphi,\qquad \rho<1,$$
$$K_1=K_2=0,\qquad \rho=1,$$
$$K_1=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi,\quad K_2=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi,\quad \rho>1.$$

【4331】 若 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则称二阶可微函数$u=u(x,y)$为调和函数,证明:当且仅当以下条件成立时,$u$ 才是调和函数:

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0,$$

式中 C 为任意封闭围线,$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿此围线之外法线方向的导数.

证 由于
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x),$$

而(参看 4323 题的推导)

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\frac{dy}{ds},\quad \sin(\boldsymbol{n},x)=-\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式(注意,题中应假定 $u(x,y)$具有连续的二阶偏导数),得

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=\iint_S(\Delta u)dxdy,$$

其中 S 表由封闭曲线 C 围成的区域. 由此式知:$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$(对任何封闭围线 C)当且仅当$\iint_S(\Delta u)dxdy=0$(对任何区域 S). 但易知这又相当于 $\Delta u\equiv0$. 事实上,若 $\Delta u\equiv0$,则对任何 S,有$\iint_S(\Delta u)dxdy=0$;反之,若对任何 S,有$\iint_S(\Delta u)dxdy=0$,则必 $\Delta u\equiv0$. 因为,若不然,在某点(x_0,y_0),$\Delta u\neq0$. 例如,设在此点,$\Delta u>0$,则由连续性可知,必存在以(x_0,y_0)为中心,半径为 r_0(充分小)的圆域 S_0,使在其上每一点,都有 $\Delta u>0$. 由此可知,$\iint_S(\Delta u)dxdy>0$. 矛盾,证毕.

【4332】 证明:
$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint_S u\Delta u dxdy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

式中光滑曲线 C 是有界区域 S 的边界.

证 由于

$$\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x)\right]ds=\oint_C u\frac{\partial u}{\partial x}dy-u\frac{\partial u}{\partial y}dx$$
$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy=\iint_S u\Delta u dxdy+\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

故得 $$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_S u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

【4333】 证明:若一函数在有界区域 S 内及其边界 C 上为调和函数,则此函数单值地由它在边界 C 上的值确定(参考 4332 题).

证 由题意知,我们只要证明:如在有界区域 S 上的两个调和函数 u_1 和 u_2,在其边界 C 上有相同的数值,则它们在整个区域上恒等.这也就是要证明:若调和函数 $u=u_1-u_2$ 在边界 C 上等于零,则它在整个区域上恒为零.事实上,利用 4332 题的结果,得

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是,在整个区域 S 上,有 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

这表明,在 S 上 u 为常数.但在边界 C 上 $u=0$,故在区域 S 上 $u\equiv 0$,即 $u_1=u_2$.

【4334】 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界,$\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

证 我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x)\right]\mathrm{d}s=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_S v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同理,有 $$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是, $$\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s=\oint_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\iint_S v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【4335】 利用格林第二公式证明:若 $u=u(x,y)$ 是有界闭区域 S 内的调和函数,则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

式中 C 为区域 S 的边界,$\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量,(x,y) 为区域 S 的内点,$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}$ 为点 (x,y) 与围线 C 上的动点 (ξ,η) 之间的距离.

提示 从区域 S 中除去点 (x,y) 与该点的无穷小的圆形邻域,并对区域 S 的剩余部分(图 8.67 中的区域 S')应用格林第二公式.

证 先证 $v=\ln r$ 为 (ξ,η) ($(\xi,\eta)\neq(x,y)$) 的调和函数.事实上,我们有

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

因此,$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=0$,即 $\Delta v=0$.

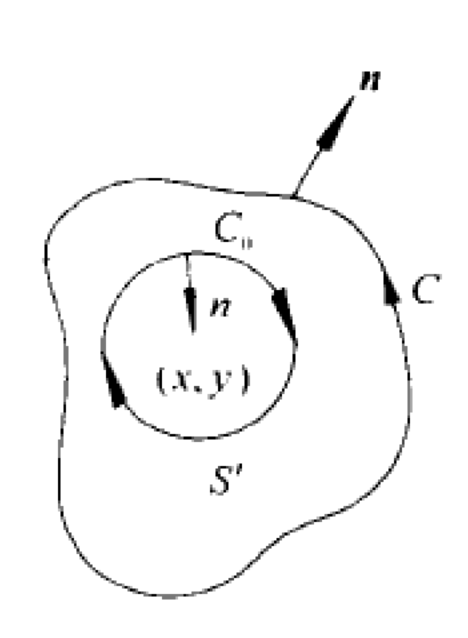


图 8.67

今以点 (x,y) (当 $(\xi,\eta)\neq(x,y)$ 时)为中心,ρ 为半径画一圆 C_0,使此圆包含在围线 C 内,C_0 及 C 的正向如图 8.67 所示.曲线 C 的法线向外,C_0 的法线指向点 (x,y).因此,在 C_0 上,我们有

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所围的区域 S' 上去，即得

$$\iint\limits_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta \ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

由于 $\Delta\ln r=0$，$\Delta u=0$，故得

$$\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s=0.$$

将行列式展开，并利用曲线积分的性质，即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}s=0\cdot\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}\mathrm{d}s^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中 $u(\xi',\eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值，故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

两端令 $\rho\to+0$ 取极限，并注意到函数 u 在点 (x,y) 的连续性，即得

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

*） 利用 4331 题的结果.

**） 利用第一型曲线积分的中值定理，其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

【4336】*) 证明对于调和函数 $u(M)=u(x,y)$ 的中值定理：

$$u(M)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

式中 C_ρ 是以点 M 为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果（取 C 为 C_ρ），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s;$$

但在 C_ρ 上，有 $r=\rho$，

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho},$$

由此，再注意到 $\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$（这是利用 4331 题的结果），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(\frac{u}{\rho}-\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u\mathrm{d}s-\frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s.$$

证毕.

*） 原题中漏掉了 ρ，即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

【4337】 证明：有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x,y)$ 在此区域内的点不能达到其最大值或最小值（极大值原理）.

证 设有界闭区域为 $\bar{\Omega}$，它是由有界开区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明：如果 $u(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内的某点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值（例如，设达到最大值），则 $u(x,y)$，在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证明.

(1) 先证：若圆域 $S_\rho=\left\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\right\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何的 $0<r\leqslant\rho$，用 C_r 表圆周 $\left\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\right\}$。由 4336 题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s=0. \tag{1'}$$

但因 $u(x_0,y_0)$ 为最大值，故在 C_r 上恒有

$$u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant 0.$$

由此，根据(1′)，即易知在 C_r 上 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$。因为，若有某点 $(\xi_0,\eta_0)\in C_r$ 使 $u(x_0,y_0)-u(\xi_0,\eta_0)=\tau>0$，则由 $u(x,y)$ 的连续性可知，必有以 (ξ_0,η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在，使当 $(\xi,\eta)\in\sigma$ 时，恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$。用 C'_r 表 C_r 含于 σ 内的部分，则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\int_{C'_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\oint_{C'_r}\frac{\tau}{2}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\tau l'_r>0,$$

其中 l'_r 表圆弧 C'_r 之长，此显然与(1′)式矛盾。

于是，在 C_r 上有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$。再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$，即知对任何 $(\xi,\eta)\in S_\rho$，都有 $u(\xi,\eta)=u(x_0,y_0)$。换句话说，$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数。

(2) 次证：设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 $\bar{\Omega}$ 的任一内点（即 $P^*\in\Omega$），则必有 $u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0)$。

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来（图 8.68）。用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离，即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

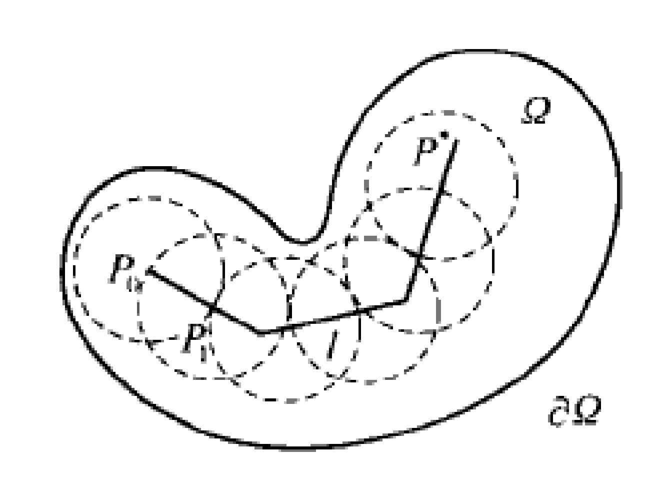


图 8.68

其中 min 的是对一切 $(x,y)\in\partial\Omega$，$(x,y)\in l$ 来取的（由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而 $\delta>0$）。取 $0<\delta'<\delta$。以点 P_0 为中心，δ' 为半径作一圆，得圆域 $S_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\}$，此圆域完全含于 Ω 内，由(1)段已证的结论知，$u(x,y)$ 在 S_0 中为常数。特别 $u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$，这里点 $P_1(x_1,y_1)$ 代表圆周 $C_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta'^2\}$ 与 l 折线的交点。又以点 P_1 为中心，δ' 半径作一圆，得圆域 $S_1=\left\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\right\}$。由于 $u(x,y)$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 也达到最大值，而 S_1 完全含于 Ω 内，故将(1)段结果用于 S_1 可知 $u(x,y)$ 在 S_1 上为常数，特别 $u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$，这里点 $P_2(x_2,y_2)$ 表圆周 $C_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$ 与 l 的交点（除 P_0 外的另一交点）。再以点 P_2 为中心，δ' 为半径作一圆域 S_2，…，这样继续作下去，显然，至多经过 n 次（n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数，s 表 l 的长），点 $P^*(x^*,y^*)$ 必属于 S_{n-1}，从而，

$$u(x^*y^*)=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0).$$

(3) 由(2)段的结果可知，$u(x,y)$ 在 Ω 上是常数；根据 $u(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性，通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限，即知 $u(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数。证毕。

注 从证明过程中看出，需假定区域 Ω（从而 $\bar{\Omega}$）是连通的。事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立。例如，设 $\bar{\Omega}=S_1+S_2$，其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域，而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1,\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中 $c_1\neq c_2$ 是两个常数，则 $u(x,y)$ 显然是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值。

【4338】 证明黎曼公式：$\displaystyle\iint_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$

式中 $$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,\quad M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv,$$

(a,b,c 为常数)，P 和 Q 为某些确定的函数，围线 C 是有界区域 S 的边界.

证 因为

$$\begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix}=vL[u]-uM[v]=v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+av\frac{\partial u}{\partial x}+bv\frac{\partial u}{\partial y}+cuv-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+au\frac{\partial v}{\partial x}+bu\frac{\partial v}{\partial y}-cuv$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+a\frac{\partial}{\partial x}(vu)+b\frac{\partial}{\partial y}(uv)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+auv\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-buv\right),$$

故利用格林公式，即得

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 $$P=u\frac{\partial v}{\partial x}-buv,\qquad Q=v\frac{\partial u}{\partial y}+auv.$$

【4339】 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 为定常流的速度分量，C 为区域 S 的边界，求区域 S 内流体质量的变化率.若流体是不可压缩的，且在区域 S 内没有源和汇，则函数 u 和 v 满足怎样的方程？

解 设流体的速度为 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{w}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$，又 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$. 于是，流体量为

$$Q=\oint_C \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\oint_C[u\cos(\boldsymbol{n},x)+v\sin(\boldsymbol{n},x)]\mathrm{d}s=\oint_C u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x^{*)}=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量，并且此处已假定流体的面密度等于 1.若流体是不可压缩的，且在区域 S 内没有源和汇，则流体的流出量与流入量的差 Q 应等于零，即

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又显然，对于任意的围线 C，上述结果均正确. 于是，连续函数u，v应满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*) 参看 4323 题的题解.

【4340】+ 根据毕奥-萨瓦尔定律，通过导线元 $\mathrm{d}s$ 的电流 i 在空间的点 $M(x,y,z)$ 处所对应的磁场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=ki\frac{(\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s})}{r^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为连接导线元 $\mathrm{d}s$ 与点 M 的向量，k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情形，求点 M 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的投影 H_x,H_y,H_z.

解 由题意知：若设导线 C 上的动点为(ξ,η,ζ)，则

$$\boldsymbol{r}=(\xi-x)\boldsymbol{i}+(\eta-y)\boldsymbol{j}+(\zeta-z)\boldsymbol{k}.$$

又 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}\xi\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}\eta\,\boldsymbol{j}+\mathrm{d}\zeta\,\boldsymbol{k}$. 于是，磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=ki\oint_C\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ \mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\eta & \mathrm{d}\zeta\end{vmatrix}=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)\mathrm{d}\zeta-(\zeta-z)\mathrm{d}\eta]\boldsymbol{i}+ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)\mathrm{d}\xi$$

$$-(\xi-x)\mathrm{d}\zeta]\boldsymbol{k}+ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\mathrm{d}\xi]\boldsymbol{k},$$

从而投影

$$H_x=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)\mathrm{d}\zeta-(\zeta-z)\mathrm{d}\eta],\qquad H_y=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)\mathrm{d}\xi-(\xi-x)\mathrm{d}\zeta],$$

$$H_z=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\mathrm{d}\xi].$$

§ 14. 曲面积分

1° **第一型曲面积分** 若 S 为分片光滑的双侧曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\ \ ((u,v)\in\Omega) \tag{1}$$

而 $f(x,y,z)$ 为在曲面 S 的各点上有定义并且连续的函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

式中 $$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下，若曲面的方程具有以下形式：

$$z=z(x,y)\quad ((x,y)\in\sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续可微函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此积分与曲面 S 的正反面的选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 当作曲面 S 在点 (x,y,z) 的面密度，则积分(2)是此曲面的质量.

2° **第二型曲面积分** 若 S 为光滑的双侧曲面；S^+ 为它的正面，即由法向量 $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 确定的一面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数，则

$$\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S. \tag{3}$$

若曲面 S 以参数方程(1)的形式给出，则法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦由下列公式来确定：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时，积分(3)的符号相反.

【4341】 两个积分 $I_1=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$ 和 $I_2=\iint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}P$，

(式中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，P 为其内接八面体的表面 $|x|+|y|+|z|=a$)相差若何？

解 若令 $$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=a\sin\varphi\sin\theta,\quad z=a\cos\varphi,$$

则有

$$I_1=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a^2\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta=4\pi a^4.$$

为求 I_2，只要注意到 $|z|=a-(|x|+|y|)$，并利用对称性，即得

$$\begin{aligned}
I_2&=\iint_P(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}P=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\sqrt{3}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\mathrm{d}y\\
&=16\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\left[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}-a(x+y)\right]\mathrm{d}y\\
&=16\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3-ax(a-x)+\frac{a^2}{2}(a-x)\right]\mathrm{d}x\\
&=16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4=2\sqrt{3}a^4.
\end{aligned}$$

于是，两积分之差为
$$I_1-I_2=2(2\pi-\sqrt{3})a^4.$$

【4342】 计算
$$\iint_S z\mathrm{d}S,$$
式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az\ (a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分.

解　作变换
$$x=ar\sin\theta,\quad y=y,\quad z=a+ar\cos\theta,$$
则两曲面分别化为
$$r=1,\quad 和\quad y^2=2a^2\cos\theta(1+\cos\theta).$$
两曲面交线的参数方程为
$$x=a\sin\theta,\quad y=\pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)},\quad z=a+a\cos\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$
于是，
$$\iint_S z\mathrm{d}S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}(a+a\cos\theta)a\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}\mathrm{d}\theta$$
$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta}\mathrm{d}(\cos\theta)=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{(1-\cos\theta)}}\mathrm{d}(\cos\theta)$$
$$=4\sqrt{2}a^3\int_0^1\left[t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}t=4\sqrt{2}a^3\left[\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3.$$

计算下列第一型曲面积分：

【4343】 $\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S$，式中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant0$.

解　由于
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$
故有
$$\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-a}^{a}(\pi ax+2a\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x=4a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=4a\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^3.$$

【4344】 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，式中 S 为区域 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant1$ 的边界.

解　面积 S 由两部分组成. 一部分为 $S_1:z=\sqrt{x^2+y^2}$，它在 Oxy 平面上的投影为 $x^2+y^2=1$；另一部分为 $S_2:z=1$，它在 Oxy 平面上的投影也是 $x^2+y^2=1$. 对于这两部分分别有
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},\qquad\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=1.$$
若利用极坐标，则有
$$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r^3\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

【4345】 $\iint_S\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$，式中 S 为四面体 $x+y+z\leqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 的边界.

提示　注意曲面 S 由四部分组成，分别为
$$S_1:x+y+z=1,x>0,y>0,z>0;\ S_2:x=0;\ S_3:y=0;\ S_4:z=0.$$

解　曲面 S 由四部分组成，分别为 $S_1:x+y+z=1,x>0,y>0,z>0;S_2:x=0;S_3:y=0;S_4:z=0$. 于是，我们有

$$\iint\limits_{S}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x^2)}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)(\ln2-\frac{1}{2})+2(1-\ln2)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln2.$$

【4346】 $\iint\limits_{S}|xyz|\mathrm{d}S$，式中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的部分.

解 由于
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$
若利用极坐标，并注意到对称性，即得

$$\iint\limits_{S}|xyz|\mathrm{d}S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,\mathrm{d}t^{*)}$$

$$=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}(y^2-1)^2y^2\mathrm{d}y^{**)}=\frac{1}{32}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{5}}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

*) 作代换 $r^2=t$，

**) 作代换 $\sqrt{1+4t}=y$.

【4347】 $\iint\limits_{S}\frac{\mathrm{d}S}{\rho}$，式中 S 为椭球面，ρ 为椭球中心到与椭球面微元 $\mathrm{d}S$ 相切的平面的距离.

解 设椭球面方程为
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
则曲面上任一点 (x,y,z) 的法矢向为 $\left\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right\}$. 从而，由题设知：$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}$ 分别表示点 (x,y,z) 处的法向量和径向量，即 $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$，

而法线与 Oz 轴夹角的余弦为
$$\frac{\dfrac{z}{c^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

于是，
$$\iint\limits_{S}\frac{\mathrm{d}S}{\rho}=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}\frac{c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1}\frac{c\left[\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{r^2}{c^2}\right)abr\mathrm{d}\theta^{*)}$$

$$=2\pi abc\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\sqrt{1-r^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+2\frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2}\right]r\mathrm{d}r^{**)}$$

$$=-\pi abc\left[2\sqrt{1-r^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{4}{3c^2}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

*) 作广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$.

**) 利用关系式：$\dfrac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\sqrt{1-r^2}$.

【4348】 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，式中 S 为螺旋面的一部分：$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$ $(0<u<a; 0<v<2\pi)$.

解 由于

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=-u\sin v\cos v+u\cos v\sin v=0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$. 于是，

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\int_0^a \mathrm{d}u\int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v=2\pi^2\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]$$

【4349】 $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S$，式中 S 为圆锥面的一部分：$x=r\cos\varphi\sin\alpha, y=r\sin\varphi\sin\alpha, z=r\cos\alpha$ $(0\leqslant r\leqslant a; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 和 α 为常数 $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

解 由于

$$E=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$G=r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha+r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha=r^2\sin^2\alpha,$$
$$F=(\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha)+\sin\varphi\sin\alpha(r\cos\varphi\sin\alpha)=0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2}=r\sin\alpha$. 于是， $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cos\alpha\cdot r\sin\alpha\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

【4350】 $\iint\limits_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，式中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

解 由于 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

又曲面 S 在平面 Oxy 上的投影域为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 于是，利用极坐标，即得

$$\iint\limits_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)]r\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

【4351】 证明泊松公式：

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u,$$

式中 S 是球面 $x^2+y^2+z=1$.

证 取新坐标系 $Ouvw$，其中原点不变，平面 $ax+by+cz=0$ 即为 Ovw 面，u 轴垂直于该面，则有

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

在新坐标系下，公式左端的积分可写为 $\iint\limits_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}S$.

显然，球面 S 的方程为 $\quad u^2+v^2+w^2=1$ 或 $v^2+w^2=(\sqrt{1-u^2})^2$.

若表示成参数式，则为

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos w,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin w,$$

其中 $-1\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant w\leqslant 2\pi$. 从而， $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}w=\sqrt{\frac{1}{1-u^2}(1-u)^2-0}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}w=\mathrm{d}u\mathrm{d}w.$

于是，最后得

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}w\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u.$$

【4352】 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度按规律 $\rho=z$ 而变.

解 质量为

$$M=\iint_S \rho\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2} z\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}(r^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}(1+r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$$

【4353】 求密度为 ρ_0 的均质球面壳 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 对于 Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$I_z=\iint_S(x^2+y^2)\rho_0\mathrm{d}S=\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi a^4\rho_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi a^4\rho_0.$$

【4354】 求密度为 ρ_0 的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\quad(0\leqslant z\leqslant b)$$

对直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

解 设 (x,y,z) 为均质锥面壳上任一点，它到直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d|=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y-0 & z-b\\ 0 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z-b & x-0\\ 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x-0 & y-0\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是，所求的转动惯量为

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2\right]\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\left[\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2+r^2\sin^2\varphi\right]r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\left[2\pi a^2b^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi a^4}{4}\right]=\frac{\pi a\rho_0(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}.$$

【4355】 求均质曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的质心坐标.

解 质量为 $$M=\iint_S\rho_0\mathrm{d}S=\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而，质心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt^{*)}=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt=\frac{a}{2},$$

$$y_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}y\,dy=0,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}z\,dxdy=\frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\,dr=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{16a}{9\pi},$$

即质心为$\left(\frac{a}{2},0,\frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换 $t=x-\frac{a}{2}$.

【4356】 求均质曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant0;y\geqslant0;x+y\leqslant a)$的质心坐标.

解 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以，
$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由对称性知，质心的横坐标与纵坐标相等，即

$$x_0=y_0=\frac{\iint\limits_S x\,dS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy}{\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy}.$$

由于，
$$\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a-y}dy$$

$$=a\left[\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy-\int_0^a\sqrt{2ay-2y^2}\,dy\right]=a\left(\frac{\pi a^2}{4}-\sqrt{2}\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\right)^{*)}=\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx=-4a^2\int_1^0\frac{u}{(1+u^2)}\arcsin u\,du$$

$$=2a^2\left(\frac{\arcsin u}{1+u^2}\Big|_1^0-\int_1^0\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}}\right)=2a^2\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_0^1\right]^{**)}=\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right),$$

故有
$$x_0=y_0=\frac{\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于
$$\iint\limits_S z\,dS=\int_0^a\int_0^{a-x}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^a(a-x)\,dx=\frac{a^3}{2},$$

故有
$$z_0=\frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1),$$

即质心为$\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$.

*) 由定积分的几何意义知：

$$\int_0^a\sqrt{y(a-y)}\,dy=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}dy=\frac{\pi a^2}{8}.$$

**) 利用 1957 题的结果.

【4357】 密度为 ρ_0 的均质截圆锥面

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0<b\leqslant r\leqslant a).$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该圆锥面顶点的质点?

解 显然截圆锥面顶点为原点 $O(0,0,0)$. 对应于半径 r 处取斜高为 ds 的锥面带,其面积为

$$dS=2\pi r ds=2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点 O 处质量为 m 的质点的引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射投影显见为零,而在 Oz 轴上的投影为

$$dZ=\frac{km\cdot 2\sqrt{2}\pi r dr\rho_0}{r^2+z^2}\ \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}.$$

于是,截圆锥面吸引质量为 m 的质点(在顶点处)的引力在坐标轴上的投影为

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=\int_b^a\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}=k\pi m\rho_0\ln\frac{a}{b}.$$

【4358】 求密度为 ρ_0 的均质球面 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的势,即计算积分

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

解 记 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 由对称性,在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的势等于在点 $N_0(0,0,r_0)$ 的势. 由余弦定理知,球面上任一点 (x,y,z) 到点 N_0 的距离为

$$r=\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}\quad(0\leqslant\psi\leqslant\pi),$$

而球面带 $dS=2\pi a^2\sin\psi d\psi$. 于是,所求的势为

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r}=2\pi a^2\rho_0\int_0^\pi\frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}}.$$

令 $u^2=a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi$,则 $2udu=2r_0a\sin\psi d\psi$,即

$$\sin\psi d\psi=\frac{u}{r_0a}du.$$

从而,所求的势为

$$u=\frac{2\pi a\rho_0}{r_0}\int_{|a-r_0|}^{a+r_0}du=\begin{cases}4\pi a\rho_0, & r_0<a,\\ \dfrac{4\pi a^2\rho_0}{r_0} & r_0>a.,\\ 4\pi a\rho_0, & r_0=a\end{cases}$$

也即

$$u=4\pi\rho_0\min\left(a,\frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明:若 M_0 点在球面内,则势是个常量;若 M_0 在球面外,则在该点球面的势等于将球面质量集中于球心的势;当 M_0 点从球面内通过球面时具有连续性,从而,当 M_0 点在球面上时,势也是个常量,且等于球内任一点的势.

【4359】 计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t}f(x,y,z)dS,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图像.

解 显然,平面 $x+y+z=\pm\sqrt{3}$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面,于是,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

由方程组 $\begin{cases}x+y+z=t,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1,$$

或
$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}, \tag{1}$$

记该椭圆围成的区域为 Ω,则

$$F(t)=\iint_{\Omega}\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\}\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\iint_{\Omega}[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy+2t(x+y)]dxdy.$$

作平移变换
$$x=x'+\frac{t}{3},\qquad y=y'+\frac{t}{3},$$

则方程(1)变为
$$x'^2+y'^2+x'y'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right), \tag{2}$$

记相应的区域为 Ω',而函数为
$$f=1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'.$$

于是,
$$F(t)=\sqrt{3}\iint_{\Omega'}\left[1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'\right]dx'dy'$$

再作旋转变换
$$x'=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}},\qquad y'=\frac{x''+y''}{2},$$

则方程(2)变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}=1. \tag{3}$$

记相应的区域为 Ω'',而函数为 $f=1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2)$. 于是,

$$F(t)=\sqrt{3}\iint_{\Omega''}\left[1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2)\right]dx''dy''.$$

最后,作广义极坐标变换,即 $x''=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\,r\cos\varphi,\qquad y''=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\,r\sin\varphi,$

则有
$$F(t)=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{3}\right)(r-r^3)drd\varphi=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\varphi=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,$$

其中 $|t|\leqslant\sqrt{3}$,而当 $|t|>\sqrt{3}$,则有
$$F(t)=0.$$

考虑函数 $u=F(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$. 我们有

$$\frac{du}{dt}=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)t\quad(|t|<\sqrt{3}).$$

当 $t=\sqrt{3}$ 时,u 的左导数 $=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)\Big|_{t=\sqrt{3}}=0$,$u$ 的右导数显然为零(因为 $t\geqslant\sqrt{3}$ 时,$u\equiv0$),故 $t=\sqrt{3}$ 时 u 的导数存在且等于零. 同理可证,$t=-\sqrt{3}$ 时,u 的导数也存在且等于零. 于是,曲线 $u=F(t)$ 在 $t=0$ 处以及 $|t|\geqslant\sqrt{3}$ 的各 t 处切线都平行于 Ot 轴. 又 $t=0$ 处达极大值 $u=\frac{\pi}{2}$,且为最大值. 由于

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{2\pi}{3}(1-t^2),$$

所以,当 $t=\pm1$ 时为拐点. 显然,图像关于 Ou 轴是对称的. 函数 $u=F(t)$ 的图像如图 8.69 所示.

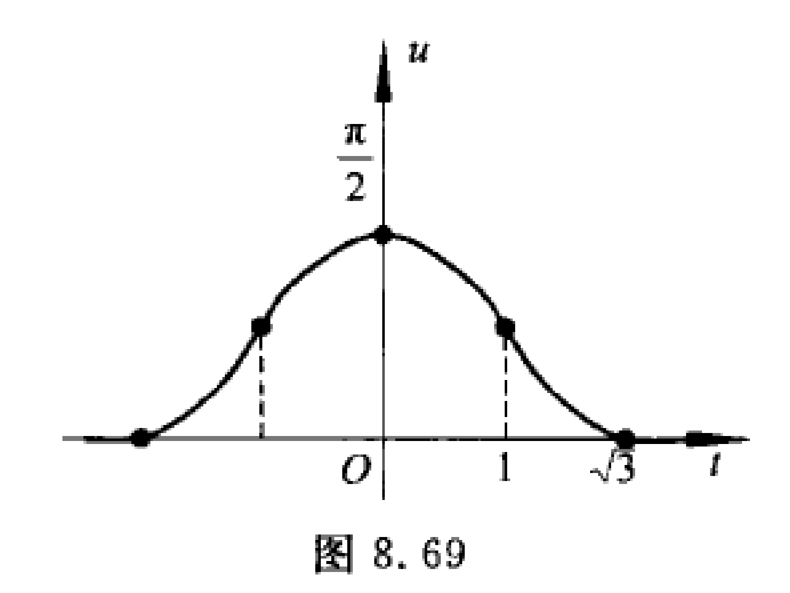


图 8.69

【4360】 计算积分
$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$
式中
$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

解 由球面方程 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 知
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{[illegible]}{\sqrt{t^2-[illegible]}}\ [illegible]\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}},$$
而由
$$\begin{cases}[illegible]=t^2,\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$$
可得
$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$
于是，积分
$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}(x^2+y^2)\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$
因为
$$\int\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-r^2-t^2}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}(t^2-r^2)=\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2\sqrt{t^2-r^2}+C,$$
所以，
$$\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=\left[\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2\sqrt{t^2-r^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}=\frac{-5\sqrt{2}}{12}|t|^3+\frac{2}{3}|t|^3=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3.$$
于是，最后得 $F(t)=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3\mathrm{d}\varphi=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4.$

【4361】 计算积分 $F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S,$

其中 S 是变球面 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$，
$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2,\end{cases}$$
且假设 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$.

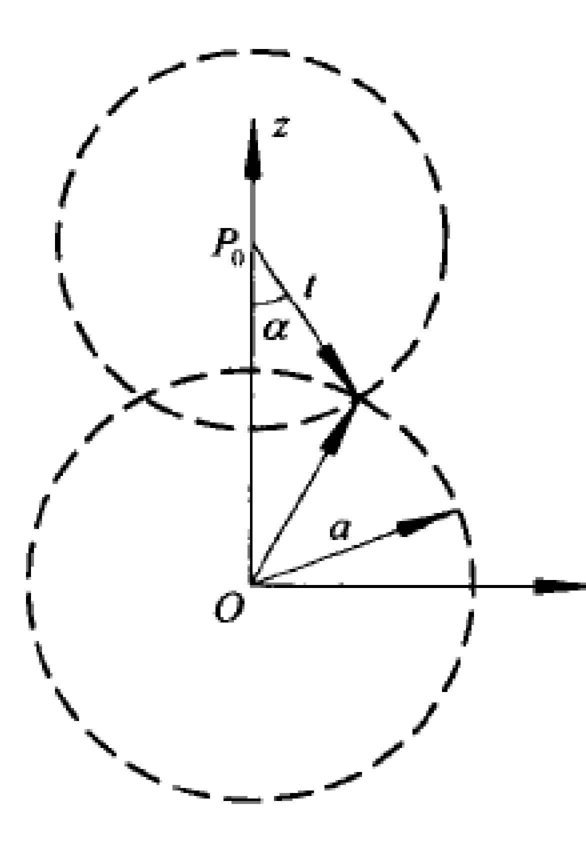


图 8.70

解 记 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴，使点 $P(x,y,z)$ 位于 Oz 轴的正方向上的点 $P_0(0,0,r)$，如图 8.70 所示.

显然，当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时，整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2$，此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$. 从而，积分
$$f(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S=0.$$
当 $r-a<t<r+a$ 时，则 $F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}S'$，其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分. 从而，我们有
$$F(x,y,z,t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}t^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi t^2(1-\cos\alpha)=2\pi t^2\left(1-\frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2].$$

计算下列第二型曲面积分：

【4362】 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

提示 根据轮换对称知，只要计算 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 注意到上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 应取上侧，下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 应取下侧.

解 根据轮换对称知，只要计算$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 注意到上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取上侧，下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取下侧，则有

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

于是，积分
$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3.$$

【4363】 $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中$f(x),g(y),h(z)$为连续函数，$S$为平行六面体$0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b;0\leqslant z\leqslant c$的外表面.

解 只要计算任何一个积分，其他两个可类似地写出结果. 例如，下面计算$\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于六面体有四个面垂直于$Oxy$平面，故曲面积分应为零. 从而，

$$\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc\frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地，可得到$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$及$\iint\limits_S g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$的值. 于是，所求的积分为

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

【4364】 $\iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中$S$为圆锥面$x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$的外侧.

解 解法1：

记S_1、S_2分别为锥面的底面和侧面，而$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为锥面外法线的方向余弦. 一方面，我们有

$$\iint\limits_{S_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h r^2(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=0.$$

另一方面，在侧面S_2上，对于任一点(x,y,z)，有

$$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{-z}$$

从而，$\mathrm{d}S$在各坐标面上的投影分别为

$$\cos\gamma\mathrm{d}S=-\mathrm{d}\sigma_{xy},\qquad \cos\alpha\mathrm{d}S=-\frac{x}{z}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{x}{z}\mathrm{d}\sigma_{xy},\qquad \cos\beta\mathrm{d}S=-\frac{y}{z}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{y}{z}\mathrm{d}\sigma_{xy}.$$

于是，

$$\iint\limits_{S_2}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_2}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left[\frac{x}{z}(y-z)+\frac{y}{z}(z-x)-(x-y)\right]\mathrm{d}\sigma_{xy}=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

综上所述，我们得
$$\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}=0.$$

解法2：

记曲面S在各坐标面的投影域分别为S_{xy}，S_{yz}和S_{zx}. 于是，

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\left[\iint_{S_{yz}} (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{S_{yz}} (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]+\left[\iint_{S_{zx}} (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{S_{zx}} (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right]$$
$$+\left[\iint_{S_{xy}} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_{xy}} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$=0+0+0=0.$$

【4365】 $\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$,式中 S 为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

提示 根据轮换对称知,只要计算$\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$,与 4362 题类似,注意曲面的侧,并利用广义极坐标 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$.

解 根据轮换对称知,只要计算一个积分.例如,计算$\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$.利用广义极坐标,即得

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{-1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{c}\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=\frac{4\pi ab}{c}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]\Big|_0^1=4\pi\frac{ab}{c}.$$

于是,我们有 $$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)=\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2).$$

【4366】 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,式中 S 为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2=R^2$ 的外侧.

解 根据轮换对称知,只要计算$\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.注意到 $z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$,并利用极坐标,即得

$$\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4c\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$
$$=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3c.$$

于是,我们有 $$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z)$,$Q=Q(x,y,z)$,$R=R(x,y,z)$为连续可微函数,S 为分片光滑的有界双侧曲面,其边界 C 为分段光滑的简单封闭围线,则成立斯托克斯公式:

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦,并且从此法线所指方向来看,积分时围线 C 的环绕方向

是逆时针的(对于右手坐标系).

【4367】 应用斯托克斯公式,计算曲线积分

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z,$$

式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$x+y+z=0$,并且从 Ox 轴的正向来看,积分时此圆周的环绕方向是逆时针的.用直接计算法检验结果.

解 平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

于是,

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\pi a^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

下面用直接计算法检验结果.由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0$$

消去 z,即得曲线 C 在平面 Oxy 上的投影 $x^2+y^2+xy=\dfrac{a^2}{2}$. 作旋转变换 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$,$y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$,则方程化为 $3x'^2+y'^2=a^2$.因而,曲线 C 的参数方程可取为

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right),\quad y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right),\quad z=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是,所求的曲线积分为

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right)\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(\frac{-\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

可见,两种计算法结果一样.

【4368】 计算积分 $\displaystyle\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z,$

此积分是从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 沿着螺旋线 $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 进行的.

提示 将直线段 AB 与曲线 AmB 组成封闭围线,并依正方向进行,应用斯托克斯公式即易获解.

解 连接 A、B 两点得线段 AB,它与 AmB 组成封闭围线并依正向进行,则由斯托克斯公式知:

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\iint_S 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是,

$$\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{AB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z^{*)}=\frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上,$x=a$,$y=0$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0$,而 $0\leqslant z\leqslant h$.

【4369】 设 C 为平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ ($\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦)上的封闭围线,所围面积为 S,求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

积分沿围线 C 的正方向进行.

解 若记 $P=\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma$, $Q=\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha$,

$$R=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}=\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$=2\iint_S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=2\iint_S dS=2S.$$

应用斯托克斯公式,计算积分:

【4370】 $\oint_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,式中 C 为椭圆周 $x=a\sin^2 t, y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$,并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

解 $\oint_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=\iint_S 0dydz+0dzdx+0dxdy=0.$

【4371】 $\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,式中 C 为椭圆周 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,h>0)$,并且若从 Ox 轴正向看去,积分是沿此椭圆依逆时针方向进行的.

解 椭圆如图 8.71 所示.把平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上 C 所包围的区域记为 S,则 S 的法线方向为 $\{h,0,a\}$.注意到 S 的法线方向和曲线 C 的方向是正向联系的,即得

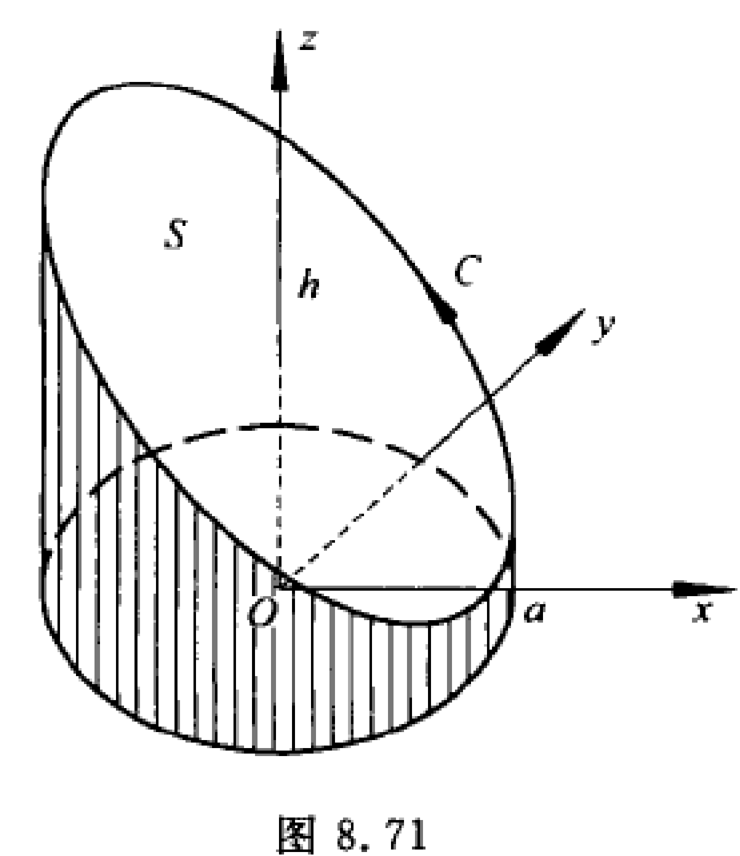


图 8.71

$$\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-2\iint_S dydz+dzdx+dxdy=-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\iint_S dS$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\pi a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi a(a+h).$$

【4372】 $\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$,式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R, z>0)$,并且在沿此曲线进行积分时,球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=2\iint_S\left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS=2\iint_S(z-y)dS.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称，故 $\iint_S y\,dS=0$. 又 $\iint_S z\,dS=\iint_S R\cos\gamma dS=R\cdot\pi r^2$，

于是，
$$\oint_C(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\pi Rr^2.$$

【4373】 $\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中 C 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 截立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 所得截面的边界，并且若从 Ox 轴的正向看去，积分是沿 C 依逆时针方向进行的.

解 平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S，它在 Oxy 平面上的投影域记为 S_{xy}，其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$. 当平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 取上侧时，法线方向的单位向量为 $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. 于是，由斯托克斯公式知

$$\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$
$$=\iint_S\left[(-2y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-2x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dS$$
$$=-4\iint_S(x+y+z)\frac{1}{\sqrt{3}}dS=-6a\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}dS=-6a\iint_{S_{xy}}dxdy=-6a\,\frac{3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

【4374】 $\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$，式中 C 为封闭曲线 $x=a\cos t$，$y=a\cos 2t$，$z=a\cos 3t$，并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

解 取 S 为由参数方程

$$x=u\cos t,\quad y=u\cos 2t,\quad z=u\cos 3t\ (0\leqslant u\leqslant a,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示的曲面，则所给曲线 C 为曲面 S 的边界.

于是，根据斯托克斯公式，有

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz=2\iint_S x^2(y-z)dydz+y^2(z-x)dzdx+z^2(x-y)dxdy$$
$$=\pm2\int_0^{2\pi}\int_0^a[u^2\cos^2t(u\cos2t-u\cos3t)(y'_uz'_t-y'_tz'_u)+u^2\cos^22t(u\cos3t-u\cos t)(z'_ux'_t-z'_tx'_u)$$
$$+u^2\cos^23t(u\cos t-u\cos2t)(x'_uy'_t-x'_ty'_u)]dudt$$
$$=\pm2\int_0^a u^4du\int_0^{2\pi}[\cos^2t(\cos2t-\cos3t)(2\sin2t\cos3t-3\cos2t\sin3t)+\cos^22t(\cos3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin3t\cos t-\sin t\cos3t)+\cos^23t(\cos t-\cos2t)(\sin t\cos2t-2\sin2t\cos t)]dt$$
$$=\pm\frac{2}{5}a^5\int_{-\pi}^{\pi}[\cos^2t(\cos2t-\cos3t)(2\sin2t\cos3t-3\cos2t\sin3t)+\cos^22t(\cos3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin3t\cos t-\sin t\cos3t)+\cos^23t(\cos t-\cos2t)(\sin t\cos2t-2\sin2t\cos t)]dt$$
$$=0,$$

上式中正负号应这样选取，使得 S 的侧正好配合 C 的方向(t 增大的方向)，积分 $\int_0^{2\pi}$ 可以换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 是因为被积函数(t 的函数)是周期为 2π 的函数，而 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 等于零是因为被积函数为奇函数.

注 本题若不用斯托克斯公式，而直接计算线积分，则较为简单.

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz=-\int_0^{2\pi}a^5(\cos^22t\cos^23t\sin t+2\cos^2t\cos^23t\sin2t+3\cos^2t\cos^22t\sin3t)dt$$
$$=-\int_{-\pi}^{\pi}a^5(\cos^22t\cos^23t\sin t+2\cos^2t\cos^23t\sin2t+3\cos^2t\cos^22t\sin3t)dt=0,$$

$\int_0^{2\pi}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi}=0$ 的理由同上.

【4375】 有函数
$$W(x,y,z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S \quad (k=\text{常数}).$$
其中曲面 S 的边界为围线 C，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的法向量，$\boldsymbol{r}$ 为连接空间的点 $M(x,y,z)$ 与围线 C 上的动点 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 所成之径向量．证明：此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 $\boldsymbol{H}$ 的势(参阅 4340 题)．

证 利用 4340 题指出的定律，并注意到
$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\boldsymbol{k},$$
其中 $\boldsymbol{r}=(\xi-x)\boldsymbol{i}+(\eta-y)\boldsymbol{j}+(\zeta-z)\boldsymbol{k}$，即得
$$\boldsymbol{H}=ki\oint_C\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^3}$$
$$=ki\left[\oint_C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\eta\right]\boldsymbol{i}+\left[\oint_C\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\zeta\right]\boldsymbol{j}+\left[\oint_C\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\eta-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\right]\boldsymbol{k}.$$
利用斯托克斯公式，并注意到
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi},\quad\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta},\quad\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta}$$
及 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，从而，
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$
即得
$$H_x=ki\oint_C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\eta=ki\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial y}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial z}\right)\boldsymbol{i}-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\boldsymbol{k}\right]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
$$=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_S\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\boldsymbol{k}\right]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\mathrm{d}S=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S.$$
同理，
$$H_y=ki\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S,\quad H_z=ki\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S.$$
于是，最后得
$$\boldsymbol{H}=\frac{\partial W}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial W}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial W}{\partial z}\boldsymbol{k},$$
即函数 $W(x,y,z)$ 是磁场 $\boldsymbol{H}$ 的势．

§16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域 V 的边界 S 为分片光滑曲面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导数均为区域 $V+S$ 内的连续函数，则成立奥斯特罗格拉茨基公式
$$\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦．

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分，设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界，$\cos\alpha$，$cso\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦：

【4376】 $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由于 $P=x^3$，$Q=y^3$，$R=z^3$．从而，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$．

于是，$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4377】 $\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解 由于 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，故得

$$\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4378】 $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S.$

解 由于 $$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

从而，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 于是，

$$\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S=2\iiint_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

【4379】 $\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$

解 由于 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u$，故得

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint_V\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4380】 $\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$

解 记 $P^*=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}$，$Q^*=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}$，$R^*=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$，则易知$\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial Q^*}{\partial y}+\frac{\partial R^*}{\partial z}=0$. 于是，原曲面积分等于零.

【4381】 证明：若 S 为封闭的简单曲面，而 $\boldsymbol{l}$ 为任何的固定方向，则

$$\iint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

证明思路 注意 $$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\cos\alpha\cos(\boldsymbol{l},x)+\cos\beta\cos(\boldsymbol{l},y)+\cos\gamma\cos(\boldsymbol{l},z),$$
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，并利用奥氏公式，命题即获证.

证 因为 $$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\cos\alpha\cos(\boldsymbol{l},x)+\cos\beta\cos(\boldsymbol{l},y)+\cos\gamma\cos(\boldsymbol{l},z),$$
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，故有

$$\iint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=\iint_S\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos(\boldsymbol{l},y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos(\boldsymbol{l},z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $\boldsymbol{l}$ 为固定方向，从而，$\cos(\boldsymbol{l},x)$，$\cos(\boldsymbol{l},y)$，$\cos(\boldsymbol{l},z)$均为常数. 于是，

$$\iint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=\iiint_V\left[\frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},x)}{\partial x}+\frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},y)}{\partial y}+\frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4382】 证明：以曲面 S 为界的物体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证明思路 利用 $\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 及奥氏公式，命题易获证.

证 由奥氏公式，有

$$\iint_{C}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{S}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{V}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{V}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V,$$

由此可知 $V=\frac{1}{3}\iint_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$. 证毕.

【4383】 证明:以光滑锥面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 为界的锥体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于该平面上的锥底之面积,H 为锥体的高.

证 证法 1:

不失一般性,设坐标原点位于锥面 $F(x,y,z)=0$ 的顶点. 于是,$F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的二次齐次函数. 因此,根据齐次函数的欧拉定理知,

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F(x,y,z). \tag{1}$$

由 4382 题的结果,有

$$V=\frac{1}{3}\iint_{S+S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S+\frac{1}{3}\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S, \tag{2}$$

其中 S 为锥底(位于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上),而 S_1 是锥的侧面. 在锥面 S_1(即 $F(x,y,z)=0$)上,有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

于是,注意到(1)式,即知在 S_1 上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=0,$$

从而,

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0. \tag{3}$$

又在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上,有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=H,$$

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是从原点(0,0,0)到点(x,y,z)的向径,$\boldsymbol{n}$ 为平面(锥底)的单位外法向量,H 为从原点到平面的距离(即锥体的高). 于是,

$$\iint_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=H\iint_{S}\mathrm{d}S=HS.$$

由此,再注意到(2)式与(3)式,即得 $V=\frac{1}{3}SH$.

证法 2:

取坐标系 $Ox'y'z'$,使锥的顶点在坐标原点,$Ox'y'$ 平面平行于锥的底面,由于在 z 处的锥的截面面积为

$$S(z')=\frac{Sz'^2}{H^2},$$

故所求的体积为 $$V=\int_0^H S(z')\mathrm{d}z'=\int_0^H\frac{S}{H^2}z'^2\mathrm{d}z'=\frac{1}{3}SH.$$

【4384】 求以曲面 $z=\pm c$ 及 $x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v$, $y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v$, $z=c\sin u$ 为界的物体的体积.

解 解法 1:

我们有

$$x^2+y^2=a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u, \tag{1}$$

以 $z=c\sin u$ 代入得

$$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2, \tag{2}$$

故所界物体由平面 $z=c$，$z=-c$ 及曲面(2)围成. 利用 4382 题的结果，即知所求的体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2+S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S, \tag{3}$$

其中 S_1，S_2 分别是平面 $z=c$，$z=-c$ 上的部分（此时 $u=\frac{\pi}{2}$，$u=-\frac{\pi}{2}$，从而，$x^2+y^2=b^2$，故 S_1，S_2 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant b^2$），S_3 表曲面(2)的部分，$x\cos\alpha$，$y\cos\beta$，$z\cos\gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然，在 S_1 上，$\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\frac{c}{|c|}$. 于是，

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}\frac{c^2}{|c|}\mathrm{d}S=|c|\pi b^2.$$

同理可得
$$\iint\limits_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=|c|\pi b^2,$$

此外，有

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos u\cos v+b\sin u\sin v)(y'_u z'_v-y'_v z'_u)+(a\cos u\sin v-b\sin u\cos v)(z'_u x'_v-z'_v x'_u)$$
$$+c\sin u(x'_u y'_v-x'_v y'_u)]\mathrm{d}u$$

$$=\pm\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ca^2\cos u\mathrm{d}u=\pm 4\pi ca^2, \tag{4}$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧. 下面确定此正负号. 由(2)，S_3 的方程可写为 $F(x,y,z)=a^2$，其中 $F(x,y,z)=x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2$ 是二次齐次函数. 于是，在 S_3 上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧. 于是，根据齐次函数的欧拉定理，在 S_3（外侧）上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2F}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}, \tag{5}$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线（即 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$）的各点上，对 S_3 的外侧，显然有（注意到曲面(2)关于 Oxy 坐标平面对称）

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}>0,$$

（这是因为此时径向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 与单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向一致），由此可知，在(5)式中应取正号. 于是，

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S}\frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}\mathrm{d}S>0.$$

从而，由(4)式知
$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=4\pi|c|a^2.$$

综上所述，最后得（注意(3)式）

$$V=\frac{1}{3}(4\pi|c|a^2+|c|\pi b^2+|c|\pi b^2)=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

解法 2：

不用曲面积分求体积的公式(3)，而直接计算体积较为简单. 由(1)式知，平面 $z=$常数(即 $u=$常数)与曲面(2)的截面 $S(z)$是圆，故所求的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{S(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c}S(z)\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u)|c|\mathrm{d}(\sin u)$$

$$=|c|\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2+(b^2-a^2)\sin^2u]\mathrm{d}(\sin u)=\pi|c|\left[2a^2+\frac{2}{3}(b^2-a^2)\right]=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

【4385】 求以曲面 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=-u+a\cos v$ $(u\geqslant0)$及平面 $x=0,z=0$ $(a>0)$为界的物体的体积.

解 解法 1：

用 S_1 表物体位于平面 $z=0$ 上的那一部分，S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分，此外，物体表面在平面 $x=0$ 上的那部分显然是一线段 $x=0,y=0,0\leqslant z\leqslant a$. 于是，利用 4382 题的结果，即知所求体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint_{S_1+S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,\tag{1}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是向外法线的方向余弦. 显然，在 S_1 上，$\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1,z=0$，故

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0.\tag{2}$$

此外，我们有

$$\iint_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{S_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(y'_uz'_v-y'_vz'_u)+u\sin v(z'_ux'_v-z'_vx'_u)+(-u+a\cos v)(x'_uy'_v-x'_vy'_u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(u\cos v-a\sin^2v)+u\sin v(a\sin v\cos v+u\sin v)+(-u+a\cos v)u]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\pm\iint_D au\cos v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{a\cos v}au\cos v\mathrm{d}u=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}a^3\cos^3v\right)\mathrm{d}v$$

$$=\pm\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\sin^2v)\mathrm{d}(\sin v)=\pm a^3\left(\sin v-\frac{\sin^3v}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pm\frac{2}{3}a^3,$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_2 的外侧，D 为 u,v 的变化区域(对应于 S_2). 由此，再注意到(1)式与(2)式，即得$V=\pm\frac{2}{9}a^3$. 但体积恒为正($V>0$)，故必有 $V=\frac{2}{9}a^3$.

解法 2：

本题若不利用曲面积分计算体积的公式(1)，而直接计算体积，则较为简单.(下面 Ω 表物体在 Oxy 平面上的投影)：

$$V=\iint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega(-u+a\cos v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D(-u+a\cos v)u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{a\cos v}(-u+a\cos v)u\mathrm{d}u=\frac{a^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3v\mathrm{d}v=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2v)\mathrm{d}(\sin v)=\frac{2}{9}a^3.$$

【4386】 证明公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}=\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z,t)\mathrm{d}S+\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(t>0).$$

证 证法 1：

作变量代换 $x=tu,y=tv,z=tw$ ($t>0$ 固定)，则(利用奥氏公式)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant1}t^3f(tu,tv,tw,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right\}$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[t^3\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+3t^2f\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}t^3\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}t^3\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{t}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{t}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(t>0),$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 上向外法线的方向余弦. 显然 $\cos\alpha=\frac{x}{t}$，$\cos\beta=\frac{y}{t}$，$\cos\gamma=\frac{z}{t}$，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{t}\mathrm{d}S=t\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f\mathrm{d}S.$$

于是，最后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(t>0).$$

证法 2：

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_0^t\left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi,t)r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t\cos\varphi\cos\psi,t\sin\varphi\cos\psi,t\sin\psi,t)t^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi,t)$$
$$\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分：

【4387】 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 的外表面.

解 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x+y+z)\mathrm{d}z=6\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z=3a^4.$

【4388】 $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面.

解 $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^a r^4\cos\psi\mathrm{d}r$

$=6\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^a r^4\mathrm{d}r\right)=\frac{12}{5}\pi a^5.$

【4389】 $\iint\limits_S(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为曲面

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

的外侧.

解 $\iint\limits_S(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的区域. 作变换 $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$，则 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4$，且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$ *). 于是，所求的积分为

$$\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} 3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积，其大小等于由平面 $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍，即为 $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

【4390】 计算
$$\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$
式中 S 为部分圆锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

提示 并合平面 $S_1: z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分组成封闭曲面.

解 并合平面 $S_1: z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分组成封闭曲面：$S+S_1$，它是空间区域 V 的边界，利用奥氏公式，即得

$$\iint_{S+S_1} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=2\iiint_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h [r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^h (rh^2-r)\mathrm{d}r=\frac{\pi h^4}{2}.$$

又因
$$\iint_{S_1} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=h^2\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^4,$$

于是，
$$\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$$

【4391】 证明公式：
$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$
其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面，$\boldsymbol{n}$ 为封闭曲面 S 上的点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量，而
$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$
$\boldsymbol{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的径向量.

提示 研究两种情形：(1) 曲面 S 不包围点 (x,y,z)；(2) 曲面 S 包围点 (x,y,z).

证 先设曲面 S 不包围点 (x,y,z)（即点 (x,y,z) 在 V 之外），我们有
$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma,$$
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 由于
$$\cos(\boldsymbol{r},x)=\frac{\xi-x}{r},\ \cos(\boldsymbol{r},y)=\frac{\eta-y}{r},\cos(\boldsymbol{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$
故
$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是，利用奥氏公式，即得
$$\iint_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\iiint_V\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$
故
$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

次设曲面 S 包围点 (x,y,z). 这时，不能对 V 应用奥氏公式，必须用一小区域将点 (x,y,z) 挖掉，即以点 (x,y,z) 为中心，ε 为半径作一开球域 V_ε（ε 充分小），其边界（球面）以 S_ε 表示. 对闭区域 $V-V_\varepsilon$，应用奥氏公式，仿上可得

$$\iint_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S+\iint_{S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint_{V-V_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\boldsymbol{n}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=-1$. 于是，

$$\iint\limits_{S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS=-4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知，在前式中令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得

$$\iiint\limits_{V}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS.$$

证毕.

【4392】 计算高斯积分
$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS,$$
式中 S 为简单封闭光滑曲面，它是区域 V 的边界，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点(ξ,η,ζ)处的外法向量，$\boldsymbol{r}$ 为连接点(x,y,z)和点(ξ,η,ζ)的径向量，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

研究两种情形：(1)曲面 S 不包围点(x,y,z)；(2)曲面 S 包围点(x,y,z).

解 设法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

因此，高斯积分
$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\xi-x}{r^3}d\eta d\zeta+\frac{\eta-y}{r^3}d\zeta d\xi+\frac{\zeta-z}{r^3}d\xi d\eta,$$

这里 $P=\frac{\xi-x}{r^3}$，$Q=\frac{\eta-y}{r^3}$，$R=\frac{\zeta-z}{r^3}$. 于是，

$$\frac{\partial P}{\partial\xi}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},\qquad \frac{\partial Q}{\partial\eta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\eta-y)^2}{r^5},\qquad \frac{\partial R}{\partial\zeta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点(x,y,z)处不连续. 因此，

(1)当曲面 S 不包围点(x,y,z)时，则 $\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{\partial R}{\partial\zeta}=0$. 于是，利用奥氏公式，有

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS=0.$$

(2)当曲面 S 包围点(x,y,z)时，则我们以点(x,y,z)为中心，ε 为半径作一球 V_ε 包围在 S 内，此球面记以 S_ε，将奥氏公式用于 $V-V_\varepsilon$ 上，即得

$$\iint\limits_{S+S_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS=0.$$

但因 $\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS=\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dS=-4\pi$，故得

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS=4\pi.$$

【4393】 证明：若
$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2},$$
有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面，则成立下列公式：

(1) $\iint\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_{V}\Delta u\,dxdydz$； (2) $\iint\limits_{S}u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz+\iiint\limits_{V}u\Delta u\,dxdydz$，

式中 u 及其二阶偏导数是在区域 $V+S$ 内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿曲面 S 的外法线的导数.

证明思路 只要注意
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$
利用奥式公式，(1)及(2)的公式均获证.

证 (1)由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，因此，利用奥氏公式即得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) $$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4394】 证明三维情形的格林第二公式：

$$\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中区域 V 以曲面 S 为界，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向量，而函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 在区域 $V+S$ 内二阶可微.

证 $$\iint\limits_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4395】 设函数 $u=u(x,y,z)$ 在某区域内具有连续的一阶和二阶导数，若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

则 $u(x,y,z)$ 称为此区域内的调和函数.

证明：若有界闭区域 V 以光滑曲面 S 为界，u 是此区域内的调和函数，则成立下列公式：

(1) $\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$； (2) $\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$，

式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量.

用公式(2)证明：区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

证 (1)由于 $\Delta u=0$，故利用 4393 题(1)的结果，即得

$$\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(2)利用 4393 题(2)的结果，即得

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V u\cdot 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

与 4333 题一样，只要证明：若在边界 S 上调和函数 $u=0$，则它在区域 V 上也恒有 $u=0$. 事实上，利用本题(2)，得

$$\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

因此，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$
即在区域 V 上 $u=$常数. 但在 S 上 $u=0$，故在区域 V 上 $u=0$. 这就是证明：在区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

【4396】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是以光滑曲面 S 为界的有界闭区域 V 内的调和函数，则
$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$
式中 $\boldsymbol{r}$ 是从区域 V 的内点 (x,y,z) 引至曲面上的点 (ξ,η,ζ) 的径向量，
$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$
$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 的外法向量.

证 在 4394 题中令 $v=\frac{1}{r}$，则当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时，有 $\Delta v=0$. 现以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内，再将 4394 题应用到由曲面 $S+S_\rho$ 所包围的区域 V 内，即得
$$\iint_{S+S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=0,$$
或
$$\iint_{S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=-\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$
显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ 上的法线是指向球心的，即指向半径减少的一方. 因此，
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}.$$
于是，我们有
$$\iint_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{u}{\rho^2}\right)\mathrm{d}S=-\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$
但 $\iint_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho}\iint_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$，又利用中值定理，得
$$\iint_{S_\rho}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}u(x',y',z')4\pi\rho^2=4\pi u(x',y',z'),$$
其中 $u(x',y',z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而，
$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$
上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim\limits_{\rho\to+0}u(x',y',z')=u(x,y,z)$. 因而，令 $\rho\to+0$. 即得
$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$
又由于
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)$$
$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2},$$
故最后得
$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

【4397】 证明：若半径为 R 的球的球心位于点 (x_0,y_0,z_0)，$u=u(x,y,z)$ 为此球内的调和函数，则

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

(中值定理).

证 在球 S 上应用 4396 题的结果,即得

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{u\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{u}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\,\mathrm{d}S^{*)}.$$

*) 利用 4395 题的结果. 有 $\frac{1}{4\pi R}\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$.

【4398】 证明:若有界闭区域 V 内的连续函数 $u=u(x, y, z)$,在此区域内部是调和函数,并且它不是常数,则此函数在区域内的点不能达到最大值和最小值(极大值原理).

证 证明与 4337 题(平面情形)完全类似. 设有界闭区域为 $\bar{\Omega}$,它是由有界开区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明:如果 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值(例如,设达到最大值),则 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证明:

(1)先证:若球域 $V_\rho=\left\{(x, y, z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\rho^2\right\}$ 完全属于 Ω,则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上为常数.

对任何的 $0<r\leqslant\rho$,用 S_r 表球面 $\left\{(x, y, z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\right\}$. 由 4397 题的结果可知

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r} u(x, y, z)\,\mathrm{d}S,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}[u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)]\,\mathrm{d}S=0. \qquad (1')$$

但因 $u(x_0, y_0, z_0)$ 是最大值,故在 S_r 上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)\geqslant 0.$$

由此,根据$(1')$,即易知在 S_r 上 $u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)\equiv 0$. 因为,若有某点 $(x_1, y_1, z_1)\in S_r$ 使

$$u(x_0, y_0, z_0)-u(x_1, y_1, z_1)=\tau>0,$$

则由 $u(x, y, z)$ 的连续性可知,必有以 (x_1, y_1, z_1) 为中心的某小球域 σ 存在,使当 $(x, y, z)\in\sigma$ 时,恒有

$$u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)\geqslant\frac{\tau}{2}.$$

用 S_r' 表 S_r 含于 σ 内的部分,则

$$\iint_{S_r}[u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)]\,\mathrm{d}S\geqslant\iint_{S_r'}[u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)]\,\mathrm{d}S\geqslant\iint_{S_r'}\frac{\tau}{2}\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\tau D_r>0,$$

其中 D_r 表 S'_r 的面积,此显然与$(1')$式矛盾. 于是,在 S_r 上有

$$u(x_0, y_0, z_0)-u(x, y, z)\equiv 0.$$

再根据 r 的任意性$(0<r\leqslant\rho)$,即知对任何 $(x, y, z)\in V_\rho$,都有 $u(x, y, z)=u(x_0, y_0, z_0)$. 换句话说,$u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上是常数.

(2)次证:设 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 为 $\bar{\Omega}$ 的任一内点(即 $P^*\in\Omega$),则必有

$$u(x^*, y^*, z^*)=u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 连接起来,用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离,即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

其中 min 是对一切 $(x, y, z)\in\partial\Omega$,$(x', y', z')\in l$ 来取的(由于 $\partial\Omega$,l 是互不相交的有界闭集,可证 min 一定能达到,从而 $\delta>0$). 取 $0<\delta'<\delta$.

以点 P_0 为中心,δ' 为半径作一球,得球域

$$V_0=\left\{(x, y, z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\delta'^2\right\},$$

此球域完全含于 Ω 内,由(1)段已证的结果知,$u(x, y, z)$ 在 V_0 上为常数,特别是 $u(x_1, y_1, z_1)=u(x_0, y_0, z_0)$.

这里点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 代表球面

$$S_0=\left\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2\right\}$$

与折线 l 的交点(参看 4337 题的图 8.68).

又以点 P_1 为中心,δ' 为半径作一球,得球域

$$V_1=\left\{(x,y,z)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\delta'^2\right\}.$$

于是,V_1 也完全含于 Ω 内. 由于 $u(x,y,z)$ 也在 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 点达到最大值,故将(1)段的结果用于 V_1,可知 $u(x,y,z)$ 在 V_1 上是常数. 特别是 $u(x_2,y_2,z_2)=u(x_1,y_1,z_1)$. 这里点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为球面

$$S_1=\left\{(x,y,z)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\delta'^2\right\}$$

与 l 的交点(除 P_0 外的另一交点).

再以点 P_2 为中心,δ' 为半径作一球域 V_2,…,这样继续下去. 显然,至多经过 n 次(n 为大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数,s 表折线 l 的长),点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$ 必属于 V_{n-1}. 从而,

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0).$$

(3)由(2)段的结果知,$u(x,y,z)$ 在 Ω 上是常数,根据 $u(x,y,z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性,通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限,即知 $u(x,y,z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注 从证明过程中看出,需假定区域 Ω(从而 $\bar{\Omega}$)是连通的. 事实上,若 Ω 不连通,则结论不一定成立. 例如,设 $\bar{\Omega}=V_1+V_2$,其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域,而令

$$u(x,y,z)=\begin{cases}C_1, & (x,y,z)\in V_1,\\ C_2, & (x,y,z)\in V_2,\end{cases}$$

其中 $C_1\neq C_2$ 是两个常数,则 $u(x,y,z)$ 显然是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上不是常数,但它却在其内点达到最大值与最小值.

【4399】 设物体 V 全部浸于液体中,利用帕斯卡定律证明:液体的浮力等于物体所排开的液体的重量,而方向是竖直向上(阿基米德定律).

证 将 Oxy 坐标面取在液面上,而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体密度为 ρ,浸入液体的物体 V 的表面积为 S. 若对应于面积元素 $\mathrm{d}S$ 液体的深度为 z,则在 $\mathrm{d}S$ 上所受的压力为 $\rho z\mathrm{d}S$,由于此压力总是垂直于 $\mathrm{d}S$ 面的,故压力在各坐标轴上的投影为 $-\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S$, $-\rho z\cos\beta\mathrm{d}S$, $-\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S$.
利用奥氏公式,即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的投影

$$P_x=-\rho\iint_S z\cos\alpha\mathrm{d}S=-\rho\iiint_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$P_y=-\rho\iint_S z\cos\beta\mathrm{d}S=-\rho\iiint_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$P_z=-\rho\iint_S z\cos\gamma\mathrm{d}S=-\rho\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\rho V.$$

因此,压力的主向量即合力,朝着竖直向上的方向,其大小等于被物体排开的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

【4400】 设 S_t 是动球面 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$,而函数 $f(\xi,\eta,\zeta)$ 是连续的,证明:函数

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

和初始条件 $u\Big|_{t=0}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$.

证 首先指出,本题应设 $f(\xi,\eta,\zeta)$ 具有连续的二阶偏导数. 先验证函数 u 满足初始 $u\Big|_{t=0}=0$ 条件(意

即 $\lim\limits_{t\to+0} u=0$）及 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f(x,y,z)$（意即 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,z)$）. 今固定 (x,y,z). 由连续性知，存在常数 $M>0$，使当 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\leqslant t^2$ 时，恒有

$$|f(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\xi(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\eta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M.$$

当 $0<t<1$ 时，我们有

$$|u(x,y,z,t)|\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}|f(\xi,\eta,\zeta)|\,\mathrm{d}S_t\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S}M\mathrm{d}S_t=\frac{1}{4\pi t}M4\pi t^2=Mt.$$

由此可知，$\lim\limits_{t\to+0}u(x,y,z,t)=0$.

又作变量代换 $\xi=x+ut,\eta=y+vt,\zeta=z+wt$，则有

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}f(x+ut,y+vt,z+wt)t\mathrm{d}S,\tag{1}$$

其中 S 是单位球面 $u^2+v^2+w^2=1$. 于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S}f(x+ut,y+vt,z+wt)t\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}u+\frac{\partial f}{\partial\eta}v+\frac{\partial f}{\partial\zeta}w\right)t\,\mathrm{d}S+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}f(x+ut,y+vt,z+wt)\mathrm{d}S=I_1+I_2.\end{aligned}\tag{2}$$

显然，当 $0<t<1$ 时，

$$|I_1|\leqslant\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S}3M\mathrm{d}S=3Mt,$$

故 $\lim\limits_{t\to+0}I_1=0$. 又显然（由于连续性）

$$\lim_{t\to+0}I_2=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{f(x,y,z)}{4\pi}\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=f(x,y,z).$$

因此，得

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,z).$$

下面再验证 u 满足波动方程. 由(2)式，利用奥氏公式，有（V 为球体 $u^2+v^2+w^2\leqslant1$，V_t 为球体 $u_1^2+v_1^2+w_1^2\leqslant t^2$）

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\frac{t^2}{4\pi}\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+ut,y+vt,z+wt)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}w_1\\&=\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}w_1\\&=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iiint\limits_{V_t}f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}w_1\right)\\&=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y+r\cos\psi\sin\varphi,z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right)=\frac{I_3}{4\pi t},\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha=u,\cos\beta=v,\cos\gamma=w$ 为 S 的外法线的方向余弦. 又由(2)式及(1)式，有

$$I_2=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S}f(x+ut,y+vt,z+wt)t\mathrm{d}S=\frac{u}{t}.$$

从而，$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}$ $(t>0)$. 于是，

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\ \frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi t}\ \frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}\right)=\frac{1}{4\pi t}\ \frac{\partial I_3}{\partial t}\quad(t>0).\tag{3}$$

但

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_3}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left[\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y+r\cos\psi\sin\varphi,z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right]\\&=\Delta\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y+r\cos\psi\sin\varphi,z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right]\end{aligned}$$

$$=\Delta\left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+t\cos\psi\cos\varphi, y+t\cos\psi\sin\varphi, z+t\sin\psi)t^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\right]=\Delta\left[\iint\limits_{S_t} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S_t\right]$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iint\limits_{S_t} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S_t\right)=\Delta\left(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S_t\right)=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\quad (t>0).$$

证毕.

§17. 场论初步

1° **梯度** 若 $u(\boldsymbol{r})=u(x,y,z)$(其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$)是连续可微标量场,则称向量

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为它的梯度,简记为 $\mathrm{grad}u=\nabla u$,其中 $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 场 u 在已知点(x,y,z)的梯度的方向与过此点的等值面 $u(x,y,z)=C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点,此向量给出函数 u 变化率最大的方向和大小,

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场 u 在某方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° **场的散度与旋度** 若

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是连续可微向量场,则称标量

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$$

称为场的旋度.

3° **向量通过曲面的通量** 若 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$给出区域 Ω 内的向量场,S 是此区域内的曲面,$n\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是曲面 S 的单位法向量,则称积分

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

(式中 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 为向量的法向分量)为向量 $\boldsymbol{a}$ 在单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 所指的方向上通过所给曲面 S 的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

式中曲面 S 为区域 V 的边界,$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位外法向量.

4° **向量的环量** 数 $\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z$

称为向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$沿某曲线 C 的曲线积分(场的功).

若 C 是封闭围线,则称曲线积分为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿围线 C 的环量.

以向量形式表述的斯托克斯公式为 $\oint_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_S(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_n\mathrm{d}S$,

式中封闭围线 C 为曲面 S 的边界，并且曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 之方向应当这样来选择：使得立于曲面 S 上的观察者从法线所指方向来看，围线 C 的环绕是逆时针的(对于右手坐标系).

5° **有势场** 若向量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 是某标量 u 的梯度，即 $\mathrm{grad}u=\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 称为有势场，而标量 u 称为场的势.

若势 u 为单值函数，则 $$\int_{AB}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=u(B)-u(A).$$

特别地，这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的环量等于零.

在单连通区域内给定的场 $\boldsymbol{a}$ 为有势场的充要条件是
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$
即这样的场应当是无旋场.

【4401】 求场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在下列各点的梯度的大小和方向：

(1)$O(0,0,0)$；(2)$A(1,1,1)$；(3)$B(2,0,1)$.

在场中怎样的点，梯度等于零?

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=6z-6$.

(1)在 O 点，有 $\mathrm{grad}u=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，$|\mathrm{grad}u|=7$，方向：
$$\cos\alpha=\frac{3}{7},\ \cos\beta=-\frac{2}{7},\ \cos\gamma=-\frac{6}{7};$$

(2)在 A 点，有 $\mathrm{grad}u=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$|\mathrm{grad}u|=3\sqrt{5}$，方向：
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma=0;$$

(3)在 B 点，有 $\mathrm{grad}u=7\boldsymbol{i}$，$|\mathrm{grad}u|=7$，方向：
$$\cos\alpha=1,\ \cos\beta=\cos\gamma=0.$$

一般地说，我们有
$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{(2x+y+3)^2+(4y+x-2)^2+(6z-6)^2}.$$

要 $|\mathrm{grad}u|=0$，只要
$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\4y+x-2=0,\\6z-6=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=-2,y=1,z=1$，即在点$(-2,1,1)$梯度为零.

【4402】 在空间 $Oxyz$ 的哪些点，场 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度

(1)垂直于 Oz 轴；(2)平行于 Oz 轴；(3)等于零?

解 $\mathrm{grad}u=(3x^2-3yz)\boldsymbol{i}+(3y^2-3xz)\boldsymbol{j}+(3z^2-3xy)\boldsymbol{k}$.

(1)要 $\mathrm{grad}u\perp Oz$，只要 $\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{k}=0$，即 $3z^2-3xy=0$ 或 $z^2=xy$. 因此，在满足 $z^2=xy$ 的点(x,y,z)，其梯度垂直于 Oz 轴.

(2)要 $\mathrm{grad}u/\!/Oz$，只要
$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=0$ 及 $x=y=z$. 因此，在点$(0,0,z)$及(x,y,z)(其中 $x=y=z$)，其梯度平行于 Oz 轴.

(3)要 $|\mathrm{grad}u|=0$，只要
$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0,\\3z^2-3xy=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=z$. 因此，在满足 $x=y=z$ 的点(x,y,z)，其梯度等于零.

【4403】 给定标量场 $$u=\ln\frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点成立等式

$$|\mathrm{grad}u|=1?$$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x-a}{r^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y-b}{r^2}, \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z-c}{r^2}$.

于是,

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}=\frac{1}{r}.$$

要 $|\mathrm{grad}u|=1$, 只要 $r=1$, 即在以点 (a,b,c) 为中心, 1 为半径的球面上, 均有

$$\left|\mathrm{grad}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right|=1.$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

【4404】 作标量场 $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$ 的等值面. 求通过点 $M(9,12,28)$ 的等值面. 在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等值面可由 $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$

化简得到. 显然有 $u\geqslant\sqrt{(z+8)^2}+\sqrt{(z-8)^2}\geqslant z+8-(z-8)=16$.

于是, 当 $u\geqslant 16$ 时, 有 $u-\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}$.

平方化简可得 $u^2-32z=2u\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$.

再平方化简, 即得等值面方程 $\dfrac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\dfrac{4z^2}{u^2}=1 \quad (u\geqslant 16)$.

这是绕 Oz 轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x=9, y=12, z=28$ 时, $u=64$. 因此, 等值面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1.$$

在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内, 由于

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2+16z+64}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-16z+64}\leqslant\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}\quad(0\leqslant z\leqslant 6),$$

故函数 $f(z)=\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}$ 在 $[0,6]$ 上的最大值即 u 的最大值.

但是, $f'(z)=8\left(\dfrac{1}{\sqrt{100+16z}}-\dfrac{1}{\sqrt{100-16z}}\right)<0 \quad (0<z\leqslant 6)$.

故 $f(z)$ 在 $[0,6]$ 上递减. 从而, $\max\limits_{0\leqslant z\leqslant 6} f(z)=f(0)=20$.

因此, 有 $\max u=20$.

【4405】 求场 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间的夹角 φ.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

在点 A,B 的梯度分别为

$$\mathrm{grad}u(A)=\frac{7}{81}\boldsymbol{i}-\frac{4}{81}\boldsymbol{j}-\frac{4}{81}\boldsymbol{k}, \quad \mathrm{grad}u(B)=-\frac{2}{25}\boldsymbol{i}+\frac{3}{50}\boldsymbol{j}.$$

于是,

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{grad}u(A)\cdot\mathrm{grad}u(B)}{|\mathrm{grad}u(A)|\cdot|\mathrm{grad}u(B)|}=\frac{-\dfrac{4}{405}}{\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{10}}=-\frac{8}{9}.$$

【4406】 设已知标量场 $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 作出场的等值面和梯度的等模面.

求区域 $1<z<2$ 内的 $\inf u, \sup u, \inf|\mathrm{grad}u|, \sup|\mathrm{grad}u|$.

解 将 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 化简整理，即得 $x^2+y^2+\frac{u^2-1}{u^2}z^2=0$.

其中显然有 $0<|u|<1$. 由此可知，等值面是一个以原点为顶点，Oz 轴为旋转轴的圆锥，但要去掉原点 $O(0,0,0)$. 因此，它是一个圆锥孔，又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

故有

$$|\operatorname{grad}u|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

令 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c$，显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面. 现在令 $y=0$，得

$$x=cx^2+cz^2\quad\text{或}\quad\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+z^2=\frac{1}{4c^2}\ (c\neq0),$$

它是 Oxz 面上的圆. 因此，梯度的等模面是一个旋转环面.

当 $1<z<2$ 时，显然有 $0<u\leqslant1$；且当 $x=y=0$ 时，$u=1$，而当 x^2+y^2 充分大时 u 可任意小，故

$$\inf_{1<z<2}u=0,\qquad\sup_{1<z<2}u=1.$$

此外，显然

$$\inf_{1<z<2}|\operatorname{grad}u|=\inf_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

由于对于常数 $a>0$，函数 $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{t+a}$ $(0\leqslant t<+\infty)$ 当 $t=a$ 时达最大值 $f(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$（这可从讨论 $f(t)$ 简单地得知），故对于固定的 z，$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是 $\frac{1}{2\sqrt{z^2}}=\frac{1}{2z}$ $(z>0)$，由此可知

$$\sup_{1<z<2}|\operatorname{grad}u|=\sup_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}.$$

【4407】 精确到高阶无穷小量，求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之二无限接近的等值面

$$u(x,y,z)=c\quad\text{及}\quad u(x,y,z)=c+\Delta c$$

之间的距离，其中 $u(x_0,y_0,z_0)=c$ $(\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)\neq0)$.

解 过点 M_0 作等值面 $u(x,y,z)=c$ 的垂线，交等值面 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则显然二等值面 $u(x,y,z)=c$ 和 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 之间的距离 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$. 由于梯度垂直于等值面，因此，$\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 的方向或者重合，或者相反. 于是，注意到 $u(x_0,y_0,z_0)=c$，$u(x_1,y_1,z_1)=c+\Delta c$，即知

$$\begin{aligned}\Delta c&=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\approx\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x_1-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y_1-y_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z_1-z_0)\\&=[\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)]\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=\pm|\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)||\overrightarrow{M_0M_1}|\\&=\pm|\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)|d.\end{aligned}$$

由此可知（精确到高阶无穷小），$d\approx\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)|}$.

【4408】 证明公式：

(1) $\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad}u$（$c$ 为常数）；　(2) $\operatorname{grad}cu=c\operatorname{grad}u$（$c$ 为常数）；

(3) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$；　(4) $\operatorname{grad}uv=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$；

(5) $\operatorname{grad}(u^2)=2u\operatorname{grad}u$；　(6) $\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u$.

提示 利用梯度的定义易证.

证

(1)由于$\frac{\partial(u+c)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}$，故得 $\mathrm{grad}(u+c)=\mathrm{grad}u$.

(2)由于$\frac{\partial(cu)}{\partial x}=c\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial z}=c\frac{\partial u}{\partial z}$，故得$\mathrm{grad}cu=c\mathrm{grad}u$.

(3)由于$\frac{\partial(u+v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}$，故得 $\mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$.

(4)由于$\frac{\partial(uv)}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uv)}{\partial y}=u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(uv)}{\partial z}=u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}$，故得 $\mathrm{grad}uv=u\mathrm{grad}v+v\mathrm{grad}u$.

(5)在(4)中令 $v=u$，即得 $\mathrm{grad}(u^2)=2u\mathrm{grad}u$.

(6)由于$\frac{\partial f(u)}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial f(u)}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial f(u)}{\partial z}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}$，故得 $\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u$.

【4409】 计算：(1)$\mathrm{grad}r$；(2)$\mathrm{grad}r^2$；(3)$\mathrm{grad}\frac{1}{r}$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 (1) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$. 于是，$\mathrm{grad}r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，

(2) $\mathrm{grad}(r^2)=2r\mathrm{grad}r=2r\frac{\boldsymbol{r}}{r}=2\boldsymbol{r}$，

(3) $\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\mathrm{grad}r=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

【4410】 求 $\mathrm{grad}f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

提示 利用 4408 题(6)及 4409 题(1)的结果.

解 $\mathrm{grad}f(r)=f'(r)\mathrm{grad}r^{*)}=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}^{**)}$.

*) 利用 4408 题(6)的结果.

**) 利用 4409 题(1)的结果

【4411】 求 $\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}$ 为引自坐标原点的径向量.

解 设 $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，其中 c_x,c_y,c_z 为常数. 由于

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}=c_xx+c_yy+c_zz \quad 及 \quad \frac{\partial(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x}=c_x,\quad \frac{\partial(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial y}=c_y,\quad \frac{\partial(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial z}=c_z,$$

故 $\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{c}$.

【4412】 求 $\mathrm{grad}\{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2\}$($\boldsymbol{c}$ 为常向量).

解 $|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2=(c_yz-c_zy)^2+(c_zx-c_xz)^2+(c_xy-c_yx)^2$. 于是，

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2\}&=[2c_z(c_zx-c_xz)-2c_y(c_xy-c_yx)]\boldsymbol{i}+[-2c_z(c_yz-c_zy)+2c_x(c_xy-c_yx)]\boldsymbol{j}\\&\quad+[2c_y(c_yz-c_zy)-2c_x(c_zx-c_xz)]\boldsymbol{k}\\&=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{i}+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{j}\\&\quad+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{k}\\&=2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})-2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

【4413】 证明公式：
$$\mathrm{grad}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}v.$$

证 由于 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial f(u,v)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$，

故有
$$\mathrm{grad}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}v.$$

【4414】 证明公式：
$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v,$$

其中 $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$，$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

证 由于$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$，故

$$\nabla^2(uv)=\nabla[\nabla(uv)]=\nabla(u\nabla v+v\nabla u)=\nabla(u\nabla v)+\nabla(v\nabla u)$$
$$=(u\nabla^2 v+\nabla u\nabla v)+(v\nabla^2 u+\nabla u\nabla v)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v.$$

【4415】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸区域 Ω 内可微，且 $|\mathrm{grad}u|\leqslant M$，其中 M 为常数，则对于 Ω 中任意两点 A,B 有：

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点之间的距离.

证 由于 Ω 为凸区域，故线段 $\overline{AB}$ 整个属于 Ω. 设 B 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，且令 $x_1-x_0=\Delta x,y_1-y_0=\Delta y,z_1-z_0=\Delta z$，并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，显然 $f(0)=u(B)$，$f(1)=u(A)$，且 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上可微，并且

$$f'(t)=u'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta x+u'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta y$$
$$+u'_z(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta z.$$

于是，由微分学中值定理知

$$u(A)-u(B)=f(1)-f(0)=f'(\xi)$$
$$=u'_x(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta x+u'_y(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta y+$$
$$u'_z(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta z$$
$$=[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA},$$

由此可知

$$|u(A)-u(B)|=|[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA}|$$
$$\leqslant|\mathrm{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)|\cdot|\overrightarrow{BA}|\leqslant M\rho(A,B).$$

【4416】 求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 处沿此点的径向量 $\boldsymbol{r}$ 之方向的导数.

在怎样的情况下，此导数等于梯度的大小？

解 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\cos\beta=\frac{y}{r}$，$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2x}{a^2}\ \frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\ \frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\ \frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又 $|\mathrm{grad}u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$. 要 $|\mathrm{grad}u|=\frac{\partial u}{\partial r}$，只要 $\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$，即只要 $a=b=c$，此即所求的解.

【4417】 求场 $u=\frac{1}{r}$（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）在方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上的导数.

在怎样的情况下，此导数等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{x}{r^3}\cos\alpha-\frac{y}{r^3}\cos\beta-\frac{z}{r^3}\cos\gamma=-\frac{1}{r^2}[\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma]$$
$$=-\frac{\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2}.$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要 $\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})=0$，即 $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$，此即所求的解.

【4418】 求场 $u=u(x,y,z)$ 在场 $v=v(x,y,z)$ 的梯度方向的导数.

在怎样的情况下，此导数等于零？

解 $\boldsymbol{l}=\mathrm{grad}v$，$\boldsymbol{l}_0=\frac{\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}_0=\frac{\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}$$

要$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要 $\mathrm{grad}u\perp\mathrm{grad}v$，此即所求的解.

【4419】 设 $u=\arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，写出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\mathrm{grad}u$ 通过单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的表达式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\left(-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

于是，

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\mathrm{grad}u=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}[(x^2+y^2+yz)\boldsymbol{i}-(x^2+y^2+xz)\boldsymbol{j}+(x-y)z\,\boldsymbol{k}].$$

【4420】 确定向量场 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\,\boldsymbol{k}$ 的向量线.

解 向量线系这样的一条曲线 C，在 C 上每一点的切线与向量场在该点的方向重合. 因此，有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\!/\boldsymbol{a}$，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_x}=\frac{\mathrm{d}y}{a_y}=\frac{\mathrm{d}z}{a_z},$$

其中 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

今有 $a_x=x,a_y=y,a_z=2z$，故得 $\qquad\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{2z}$.

解之，得 $y=c_1x$，$z=c_2x^2$.

【4421】 用直接计算的方法证明：向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$（坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$）外，另有直角坐标系 $O'x'y'z'$（坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$）. 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'},$$

设
$$\begin{cases}\boldsymbol{i}'=\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}'=\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}'=\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}.\end{cases}$$

又设 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$. 于是，空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x,y,z) 与 (x',y',z') 之间的关系为（令 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{r}'=O'P$）：

$$x'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{i}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{i}'=(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\cos\beta_1+(z-c)\cos\gamma_1,$$
$$y'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{j}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{j}'=(x-a)\cos\alpha_2+(y-b)\cos\beta_2+(z-c)\cos\gamma_2,$$
$$z'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{k}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{k}'=(x-a)\cos\alpha_3+(y-b)\cos\beta_3+(z-c)\cos\gamma_3,$$

我们有

$$\boldsymbol{a}=a_{x'}\boldsymbol{i}'+a_{y'}\boldsymbol{j}'+a_{z'}\boldsymbol{k}'$$
$$=a_{x'}(\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k})+a_{y'}(\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k})+a_{z'}(\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}).$$

由此可知

$$a_x=a_{x'}\cos\alpha_1+a_{y'}\cos\alpha_2+a_{z'}\cos\alpha_3\quad a_y=a_{x'}\cos\beta_1+a_{y'}\cos\beta_2+a_{z'}\cos\beta_3\quad a_z=a_{x'}\cos\gamma_1+a_{y'}\cos\gamma_2+a_{z'}\cos\gamma_3.$$

于是，

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}=\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha_1$$

$$+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha_2+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha_3.$$

同理,可得

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta_1+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta_2$$

$$+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\beta_3,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\gamma_1+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2$$

$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.$$

将这三式相加,得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}$$

$$+(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$

$$=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

证毕.

【4422】 证明:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S a_n\mathrm{d}S,$$

其中 S 表示围绕着点 M 的封闭曲面,V 是该曲面所围区域的体积,$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量,$d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证明思路 注意 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma$,并应用奥氏公式及积分中值定理,命题即可获证.

证 由于

$$a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.应用奥氏公式以及积分中值定理,得

$$\iint_S a_n\mathrm{d}S=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V(\mathrm{div}\boldsymbol{a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M_1)\cdot V,$$

其中 M_1 是 V 中某点,即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint_S a_n\mathrm{d}S.$$

令 $d(S)\to 0$,这时 V 缩向点 M,从而点 $M_1\to M$,取极限,即得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S a_n\mathrm{d}S.$$

证毕.

【4423】 求

$$\mathrm{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}.$$

提示 利用散度的定义,易得结果为零.

解

$$\mathrm{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}=\mathrm{div}\left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=0.$$

【4424】 证明：

(1) $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\mathrm{div}\boldsymbol{b}$； (2) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{grad}u$（$\boldsymbol{c}$ 为常量，u 为标量）；

(3) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{a})=u\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}u$.

提示 利用散度的定义易证.

证 (1)设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.

由于 $\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial b_x}{\partial x}$，$\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial b_y}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial b_z}{\partial z}$，故得 $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\mathrm{div}\boldsymbol{b}$.

(2)设 $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，其中 c_x,c_y,c_z 为常数.

由于 $\frac{\partial(uc_x)}{\partial x}=c_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uc_y)}{\partial y}=c_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(uc_z)}{\partial z}=c_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得 $\mathrm{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{grad}u$.

(3)由于 $\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}=u\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uc_y)}{\partial y}=u\frac{\partial a_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}=u\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得 $\mathrm{div}(u\boldsymbol{a})=u\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}u$.

【4425】 求 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$.

提示 利用梯度及散度的结果，易得结果为 Δu（或记成 ∇^2u）.

解 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\Delta u$ （或记成 ∇^2u）.

【4426】 求 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在怎样的情况下 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$?

提示 利用 4410 题的结果.

解 由 4410 题的结果知，
$$\mathrm{grad}f(r)=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

于是，

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f'(r)\frac{y}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f'(r)\frac{z}{r}\right]$$
$$=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).$$

要 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$，只要 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$. 将上述方程写成下述形式：

$$rf''(r)+2f'(r)=0. \quad 或 \ [rf''(r)+f'(r)]+f'(r)=0.$$

积分之，即得
$$rf'(r)+f(r)=C \quad (C 为常数).$$
再积分之，得
$$rf(r)=Cr+C_1 \quad (C_1 为常数).$$
于是，最后得
$$f(r)=C+\frac{C_1}{r},$$
此即所求的解.

【4427】 计算：(1) $\mathrm{div}\boldsymbol{r}$； (2) $\mathrm{div}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

提示 利用散度定义，易得结果：(1)3；(2) $\frac{2}{r}$.

解 (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$.

(2)
$$\mathrm{div}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)$$
$$=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}.$$

【4428】 计算 $\mathrm{div}[f(v)\boldsymbol{c}]$，式中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

提示 利用 4424 题(2)及 4410 题的结果.

解 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{grad}f(r)^{*)}=\boldsymbol{c}\cdot f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}^{**)}=\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$

*) 利用 4424 题(2)的结果.

* *) 利用 4410 题的结果

【4429】 求 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$. 在怎样的情况下该散度等于零?

提示 利用 4424 题(3)及 4410 题的结果.

解 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)^{*)}=3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}^{**)}=3f(r)+rf'(r)$.

要 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$,只要 $3f(r)+rf'(r)=0$,即 $\dfrac{f'(r)}{f(r)}=-\dfrac{3}{r}$. 积分之,即得

$$f(r)=\frac{C}{r^3}\quad (C\text{ 为常数}),$$

此即所求的解.

*) 利用 4424 题(3)的结果.

* *) 利用 4410 题的结果

【4430】 求:(1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; (2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

提示 利用 4424 题(3)及 4425 题的结果.

解 (1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}u^{*)}=u\Delta u+(\operatorname{grad}u)^{2\,**)}$

(2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad}v)+\operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}u^{*)}=u\Delta v+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v^{**)}$.

*) 利用 4424 题(3)的结果.

* *) 利用 4425 题的结果

【4431】 设流体充满空间并以恒定的角速度 w 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转. 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{w}$ 在已知时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的散度.

解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$. 微分之,即得

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})$$

$$=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}_0+(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{w}-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{r}^{*)}.$$

为了计算 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 和 $\operatorname{div}\boldsymbol{w}$,先计算 $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$,此处 $\boldsymbol{a}$ 为常向量. 由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})_x=a_yz-a_zy,\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})_y=a_zx-a_xz,\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})_z=a_xy-a_yx,$$

故得

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yz-a_zy)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zx-a_xz)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xy-a_yx)=0.$$

于是,即得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0+\operatorname{div}(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})=0.$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w}=\operatorname{div}\boldsymbol{w}_0+\operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r})+\operatorname{div}(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}_0)+\operatorname{div}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{w}]-\operatorname{div}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{r}],$$

而

$$\operatorname{div}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{w}]=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}\operatorname{div}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\operatorname{grad}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})^{**)}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}^{***)}=w^2$$

及

$$\operatorname{div}[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})=3w^2,$$

从而,最后得 $\operatorname{div}\boldsymbol{w}=w^2-3w^2=-2w^2$.

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

* *) 利用 4424 题(3)的结果

* * *) 利用 4411 题的结果.

【4432】 求包含多个引力中心的有限系统所产生的引力场之散度.

解 引力 $\boldsymbol{F}=\dfrac{k\boldsymbol{r}}{r^3}$ (k 为常数). 于是,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right)=k\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

$$=k\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right]=k\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0.$$

【4433】 求由极坐标 r 与 φ 表示的平面向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位向量为 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\varphi$，且

$$\boldsymbol{a}(r,\varphi)=a_r(r,\varphi)\boldsymbol{e}_r+a_\varphi(r,\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导数，取面积元素 $\Delta S=r\Delta\varphi\Delta r$，记其围线为 ΔC. 首先，推导向量 $\boldsymbol{a}$ 经过围线 ΔC 的通量，即矢流. 通量可分两部分：一部分是经过 r 线的；另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\int_r^{r+\Delta r}a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)\mathrm{d}r-\int_r^{r+\Delta r}a_\varphi(r,\varphi)\mathrm{d}r=\int_r^{r+\Delta r}\left[a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)-a_\varphi(r,\varphi)\right]\mathrm{d}r$$

$$=\int_r^{r+\Delta r}\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi\mathrm{d}r=\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi\Delta r,$$

$$\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)\mathrm{d}\varphi-\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r,\varphi)r\mathrm{d}\varphi=\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}\left[a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)-a_r(r,\varphi)r\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$\approx\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}\frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\Delta r\mathrm{d}\varphi\approx\frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\Delta r\Delta\varphi,$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导数的连续性，当 $\Delta r,\Delta\varphi$ 取得愈小时，上述近似等式愈精确. 于是，向量 $\boldsymbol{a}$ 经过 ΔC 的通量为

$$\oint_{\Delta C}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\approx\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}\Delta\varphi\Delta r,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲线 ΔC 的外法向量，而且当 $\Delta r,\Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确.

于是，根据散度的定义，并注意到 ΔS 收缩为一点 (r,φ) 与 $\Delta r\to0,\Delta\varphi\to0$ 等价，从而，即得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta S\to0}\frac{\oint_{\Delta C}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s}{\Delta S}=\lim_{\substack{\Delta r\to0\\ \Delta\varphi\to0}}\frac{\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}\Delta r\Delta\varphi}{r\Delta r\Delta\varphi}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

【4434】 设 $x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w)$，用正交曲线坐标 u,v,w 表示 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}(x,y,z)$. 作为特殊的情形，求用柱坐标和球坐标表示 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 的表示式.

提示 研究向量 $\boldsymbol{a}$ 通过以曲面 $u=$常数，$v=$常数，$w=$常数为界的小立体(接近于长方体)V 的表面 S 的通量.

解 考虑向量 $\boldsymbol{a}$ 通过由曲面 $u=$常数，$v=$常数，$w=$常数所界的小立体(接近于长方体)V 的表面 S 的通量(图 8.72)，我们有 $\boldsymbol{a}=a_u\boldsymbol{e}_1+a_v\boldsymbol{e}_2+a_w\boldsymbol{e}_3$. 在 u 曲线上，只有 u 变化(v 和 w 都是常数)，故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u\boldsymbol{k},$$

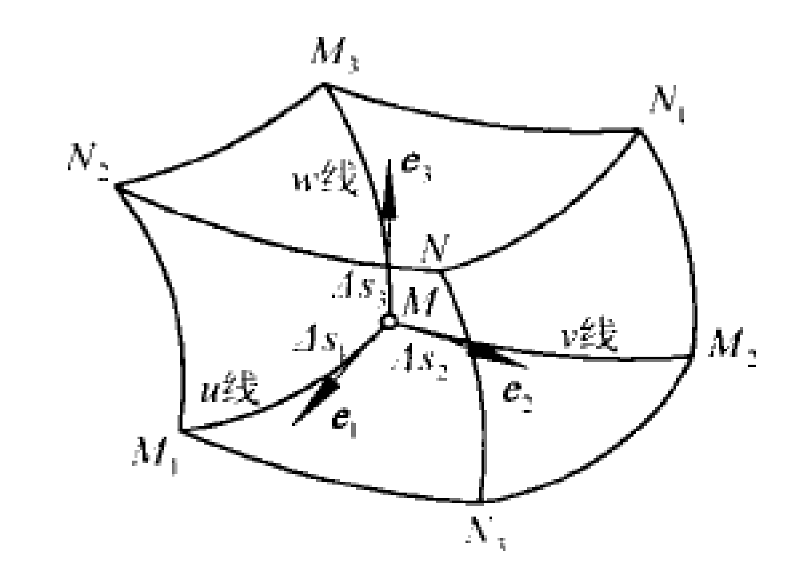


图 8.72

从而，$\mathrm{d}s_1=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=L\mathrm{d}u$，其中

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$\mathrm{d}s_1$ 为 u 曲线上的弧元素. 同理可得 $\quad \mathrm{d}s_2=M\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}s_3=N\mathrm{d}w$，

其中 $\mathrm{d}s_2,\mathrm{d}s_3$ 分别为 v,w 曲线上的弧元素，而

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},\qquad N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直，$\Delta s_1,\Delta s_2,\Delta s_3$ 都很小，故 V 接近于长方体. 因此，其体积为

$$V\approx\Delta s_1\Delta s_2\Delta s_3\approx\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=LMN\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

现计算 $\boldsymbol{a}$ 通过 V 的表面 S 向外的通量 $\iint_S a_n\mathrm{d}S$，S 共包括六块小曲面(图 8.72)，记垂直于 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的两块

为 S_1 与 S_2（即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$），垂直于 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的两块为 S_3 与 S_4，垂直于 $\boldsymbol{e}_3$ 方向的两块为 S_5 与 S_6. 显然，由于曲面很小，有

$$\iint_{S_2} a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_1} a_n \mathrm{d}S \approx a_u \Delta S_2 \Delta S_3 \Big|_{(u-\Delta u,v,w)} - a_u \Delta S_2 \Delta S_3 \Big|_{(u,v,w)}$$

$$\approx a_u MN\mathrm{d}v\mathrm{d}w \Big|_{(u-\Delta u,v,w)} - a_u MN\mathrm{d}v\mathrm{d}w \Big|_{(u,v,w)} \approx \frac{\partial(a_u MN\mathrm{d}v\mathrm{d}w)}{\partial u}\mathrm{d}u = \frac{\partial(MNa_u)}{\partial u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

同理可得

$$\iint_{S_4} a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_3} a_n \mathrm{d}S \approx \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w, \qquad \iint_{S_6} a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_5} a_n \mathrm{d}S \approx \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

相加即得
$$\iint_{S} a_n \mathrm{d}S \approx \left[\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

于是，
$$\frac{\iint_S a_n \mathrm{d}S}{V} \approx \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

显然，当小立体 V 愈缩向点 M（V 愈小）时，上述各近似等式都愈精确. 于是，令 V 缩向 M（即 S 的直径 $d(S)$ 趋于零）取极限，利用 4422 题的结果，得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{d(S)\to 0}\frac{\iint_S a_n \mathrm{d}S}{V} = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

特别是在柱坐标情形下，有 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ $(u=r, v=\varphi, w=z)$.

从而，

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, \qquad M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

于是，
$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球坐标情形下，有

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (u=r, v=\theta, w=\varphi).$$

从而，
$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, \qquad M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r\sin\theta.$$

于是，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(a_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_\varphi r)\right] = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(a_r r^2) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta\sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right].$$

【4435】 证明：

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\boldsymbol{b}$； (2) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{a}) = u\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}u \times \boldsymbol{a}$.

提示 利用旋度的定义易证.

证 (1) 设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则有

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\boldsymbol{b}.$$

(2) $\mathrm{rot}_x(u\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \left(a_z\frac{\partial u}{\partial y} - a_y\frac{\partial u}{\partial z}\right) = u\,\mathrm{rot}_x\boldsymbol{a} + (\mathrm{grad}u \times \boldsymbol{a})_x$，

同法可得

$$\mathrm{rot}_y(u\boldsymbol{a})=u\,\mathrm{rot}_y\boldsymbol{a}+(\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{a})_y,\quad \mathrm{rot}_z(u\boldsymbol{a})=u\,\mathrm{rot}_z\boldsymbol{a}+(\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{a})_z$$

于是， $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{a})=u\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{a}$.

【4436】 求：(1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{r}$； (2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$.

提示 (2)利用 4435 题(2)及 4410 题的结果.

解 (1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0.$

(2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\mathrm{rot}\boldsymbol{r}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{r}^{*)}=0+f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r}^{**)}=\boldsymbol{0}.$

*) 利用 4435 题(2)的结果.

* *) 利用 4410 题的结果

【4437】 求：(1) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}f(r)]$；(2) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$（$\boldsymbol{c}$ 为常向量）.

解 (1) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}f(r)]=f(r)\mathrm{rot}\boldsymbol{c}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{c}=\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}).$

(2) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\mathrm{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})+\mathrm{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}).$

但是，

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ c_yz-c_zy & c_zx-c_xz & c_xy-c_yx\end{vmatrix}=2\boldsymbol{c},$$

$$\mathrm{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\frac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}].$$

故最后得

$$\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]=2f(r)\boldsymbol{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}].$$

【4438】 证明：$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$.

提示 利用散度及旋度的定义易证.

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)\\&=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\&\quad-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\\&=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

【4439】 求：(1) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$； (2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})$.

解 (1) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}.$

(2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0.$

【4440】 设流体充满空间并以恒定的角速度 w 围绕轴 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 旋转. 求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在已知时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的旋度.

解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$. 从而有

$$v_x=v_{0x}+w_yz-w_zy,\quad v_y=v_{0y}+w_zx-w_xz,\quad v_z=v_{0z}+w_xy-w_yx,$$

由于 $\mathrm{rot}_x\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2w_x$，$\mathrm{rot}_y\boldsymbol{v}=2w_y$ 及 $\mathrm{rot}_z\boldsymbol{v}=2w_z$，故 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{w}$.

【4441】 求径向量 $\boldsymbol{r}$ 的通量：(1)通过圆锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面；(2)穿过此圆锥体的底面.

解 (1)在侧面上,点的向径的方向与圆锥的母线重合.因此,点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直,即 $\boldsymbol{r}$ 在法线方向上的投影 $r_n=0$. 于是,向量 $\boldsymbol{r}$ 通过侧面 D 的通量为

$$\iint_{\Omega} r_n \mathrm{d}S=0.$$

(2)在圆锥体的底面上,$r_n=h$ 于是,所求的通量为

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} r_n \mathrm{d}S=h\cdot\pi h^2=\pi h^3.$$

【4442】 求向量 $\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的通量:(1)通过圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$的侧表面;(2)通过此圆柱的全表面.

解 先求(2),由于 $$\iint_S a_n \mathrm{d}S=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V=\iiint_V 0\mathrm{d}V=0,$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 通过圆柱的全表面的通量为零.

再求(1),又由于 $S=S_{侧}+S_{上、下底}$ 及在上、下底上 $a_n=xy$,故有

$$\iint_{S_{上、下底}} a_n \mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r=0.$$

于是,$\iint\limits_{S_{侧}} a_n \mathrm{d}S=0$,即向量 $\boldsymbol{a}$ 通过侧面的通量也为零.

【4443】 求径向量 $\boldsymbol{r}$ 通过曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$的通量.

解 设 S 为所给的曲面(锥),D 为锥的底面(即 Oxy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$).由于

$$\iint_S r_n \mathrm{d}S+\iint_D r_n \mathrm{d}S=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{r}\mathrm{d}V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}\mathrm{d}z=\pi$$

及在 D 上,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{n}$,故 $r_n=0$,$\iint\limits_D r_n\,\mathrm{d}S=0$,从而,得 $\iint\limits_S r_n \mathrm{d}S=\pi$.

【4444】 求向量 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 通过正八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,$z\geqslant 0$ 的通量.

解 设 S 为所给的曲面,S_1,S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分,则有

$$\iint_S a_n \mathrm{d}S+\iint_{S_1} a_n \mathrm{d}S+\iint_{S_2} a_n \mathrm{d}S+\iint_{S_3} a_n \mathrm{d}S=\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V=2\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\cos\psi\cdot r(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)\mathrm{d}r$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos\psi\sin\psi+\cos^2\psi(\cos\varphi+\sin\varphi)]\mathrm{d}\psi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{8}\pi.$$

但在 S_i $(i=1,2,3)$上,显然有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$,故 $a_n=0$. 从而,

$$\iint_{S_i} a_n \mathrm{d}S=0 \quad (i=1,2,3).$$

于是,所求的通量为 $$\iint_S a_n \mathrm{d}S=\frac{3}{8}\pi.$$

【4445】 求向量 $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 通过以平面

$$x=0,y=0,z=0,x+y+z=a \quad (a>0)$$

为界的角锥的全表面的通量.利用奥斯特罗格拉茨基公式验证结果.

解 解法 1:

由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$,故所求的通量为 $\iint\limits_S a_n \mathrm{d}S=\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V=0$.

解法 2:

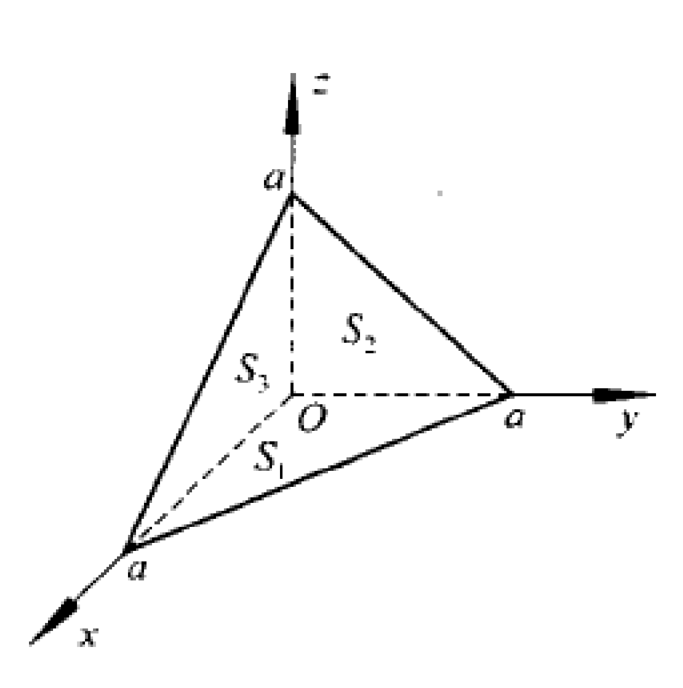


图 8.73

如图 8.73 所示.在平面 $z=0$ (S_1)上,$\boldsymbol{n}=\{0,0,-1\}$;在平面 $y=0$ (S_3)上,$\boldsymbol{n}=\{0,-1,0\}$,在平面 $x=0$ (S_2)上,$\boldsymbol{n}=\{-1,0,0\}$. 于是,

向量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S_1 的通量为

$$\iint_{S_1} a_n \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_{\substack{x+y\leqslant a \\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} (-x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量 $\boldsymbol{a}$ 通过 S_2 及 S_3 面的通量也为 $-\frac{a^3}{6}$.

对于平面 $x+y+z=a$ (S_4)，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，故通量为

$$\iint_{S_4} a_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_4} (y+z+x) \mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{x+y\leqslant a \\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} a \sqrt{1^2+1^2+1^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^3}{2}.$$

因此，最后得向量 $\boldsymbol{a}$ 通过角锥全表面的通量为

$$\sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} a_n \mathrm{d}S = \frac{a^3}{2} + 3\left(-\frac{a^3}{6}\right) = 0.$$

【4446】 证明：向量 $\boldsymbol{a}$ 通过由方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ ($(u,v)\in\Omega$) 给出的曲面 S 的通量等于

$$\iint_S \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \iint_\Omega \left(\boldsymbol{a}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

式中 $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量.

证 设曲面 S 的方程为 $\boldsymbol{r}=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$，

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}.$$

从而，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\boldsymbol{k}.$$

因此，易得

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{EG-F^2}$$

又 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 的方向显然是法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向. 于是，我们有

$$\iint_S \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S = \iint_\Omega \boldsymbol{a} \cdot \sqrt{EG-F^2}\,\boldsymbol{n} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_\Omega \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_\Omega \left(\boldsymbol{a}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

【4447】 求向量 $\boldsymbol{a}=m\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (m 为常数) 通过围绕坐标原点的封闭曲面 S 的通量.

提示 利用 4392 题(2)的结果.

解 所求的通量为 $\iint_S a_n \mathrm{d}S = m \iint_S \frac{1}{r^3} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = m \iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} \mathrm{d}S = m \cdot 4\pi^{*)} = 4\pi m.$

*) 利用 4392 题(2)的结果.

【4448】 已知向量 $a(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{\mathrm{e}_i}{4\pi r_i}\right)$，

其中 e_i 为常数，r_i 为点 M_i（点源）距动点 $M(\boldsymbol{r})$ 的距离. 求此向量通过围绕点 M_i ($i=1,2,\cdots,n$) 的封闭曲面 S 的通量.

解 首先，我们有 $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{\mathrm{e}_i}{4\pi r_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}_i \boldsymbol{r}_i}{4\pi r_i^3}.$

其次，我们考虑这样一个空间区域 V，它由曲面 S 及包围点 M_i ($i=1,2,\cdots,n$) 的 n 个小球所围成（这些小球的球心在点 M_i，半径为 ρ_i）. 由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ 在 V 内为零，故

$$\iint_S a_n \mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} a_n \mathrm{d}S,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面. 但是 $$\iint\limits_{S_j} a_n \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i \boldsymbol{r}_i}{4\pi r_i^3} \right) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

由于 $$\iint\limits_{S_j} \frac{1}{r_i^3}(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_j} \frac{\cos(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n})}{r_i^2} \mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & j \neq i, ^{*)} \\ 4\pi, & j = i, \end{cases}$$

故得 $\iint\limits_{S_j} a_n \mathrm{d}S = e_j$, 从而, $\iint\limits_{S} a_n \mathrm{d}S = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j$.

*) 利用 4392 题的结果.

【4449】 证明: $$\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \nabla^2 u \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

其中曲面 S 是区域 V 的边界.

证 参看 4393 题(1).

【4450】 在温度场 u 内, 在单位时间内通过面微元 $\mathrm{d}S$ 的热量等于:

$$\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}u \mathrm{d}S,$$

其中 k 为热导率, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量. 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程(热传导方程).

解 由于 $$\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}u \mathrm{d}S = -k \mathrm{grad}_n u \mathrm{d}S,$$

故由奥式公式, 即得 $$Q = -\iint\limits_{S} k \mathrm{grad}_n u \mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} k \mathrm{div}(\mathrm{grad}u) \mathrm{d}V.$$

因此, 每单位时间内向物体内部流入的热量为

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}(k \mathrm{grad}u) \mathrm{d}V. \tag{1}$$

这一热量引起物体内部温度的增加, 现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内温度 u 增加

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t,$$

需要对体积元素 $\mathrm{d}V$ 输入热量 $$c \mathrm{d}u \rho \mathrm{d}V = c \frac{\partial u}{\partial t} \rho \mathrm{d}t \mathrm{d}V,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是, 在时间 $\mathrm{d}t$ 内整个物体就要吸收热量

$$\mathrm{d}t \iiint\limits_{V} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}V,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint\limits_{V} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}V. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式, 即得等式 $$\iiint\limits_{V} \left\{ c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k \mathrm{grad}u) \right\} \mathrm{d}V = 0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何物体 V 都适合, 且被积函数显见连续, 故根据 4097 题的结果, 当点属于所考察的境域时, 恒有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(k \mathrm{grad}u),$$

此即所求的热传导方程.

【4451】 处于运动状态的不可压缩流体充满区域 V. 假定在区域内没有源泉和漏孔, 试推出连续性方程.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为流体密度, $\boldsymbol{v}$ 为速度向量, t 为时间.

提示 研究流体通过包含在 V 中的任一区域 V' 的表面 S' 的流量.

解 首先, 我们已知: 在每单位时间内自 V 中的任一区域 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q=\iint_{S'}\rho v_n\,\mathrm{d}S=\iiint_{V'}\operatorname{div}(\rho v)\,\mathrm{d}V. \tag{1}$$

现在我们用另一法来计算 Q，如考虑到在时间 $\mathrm{d}t$ 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t$，则立体元素 $\mathrm{d}V$ 的质量就增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}V$，而整个所考察的区域 V' 的质量就增加

$$\mathrm{d}t\iiint_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V.$$

因此，每单位时间内 V' 中质量减少

$$-\iiint_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V.$$

由于 V 内无源泉和漏孔，故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的流量 Q，即

$$Q=-\iiint_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V. \tag{2}$$

比较(1)式和(2)式，即得等式 $\iiint_{V'}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})\right)\mathrm{d}V=0.$

由于上式对 V 中任一区域 V' 均成立，且被积函数连续，故根据 4097 题的结果，当 $(x,y,z)\in V$ 时，恒有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0.$$

【4452】 求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$ 沿着一段螺旋线

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\,\boldsymbol{i}+a\sin t\,\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的环量.

解 由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(-a\sin t\,\boldsymbol{i}+a\cos t\,\boldsymbol{j}+b\,\boldsymbol{k})\mathrm{d}t$，$\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=b^2t\mathrm{d}t$，故所求的环量为

$$W=\int_0^{2\pi}b^2t\mathrm{d}t=2\pi^2b^2.$$

【4453】 求向量 $\boldsymbol{a}=f(r)\boldsymbol{r}$（其中 f 是连续函数）沿着弧 AB 的环量.

解 所求的环量为 $W=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}^0\mathrm{d}s=\int_{r_A}^{r_B}f(r)r\mathrm{d}r$，

其中 t_0 是单位切向量.

【4454】 求向量 $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$（$c$ 为常数）的环量：

(1)沿着圆周 $x^2+y^2=1,z=0$； (2)沿着圆周 $(x-2)^2+y^2=1,z=0$.

解 (1)圆 $x^2+y^2=1,z=0$ 的径向量 $\boldsymbol{r}$ 适合方程

$$\boldsymbol{r}=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+0\,\boldsymbol{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(-\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\,\boldsymbol{j}+c\,\boldsymbol{k})\cdot(-\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\,\boldsymbol{j}+0\,\boldsymbol{k})\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$，

故所求的环量为 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi$.

(2)对于圆 $(x-2)^2+y^2=1,z=0$，有

$$\boldsymbol{r}=(2+\cos t)\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(2\cos t+1)\mathrm{d}t$，故所求的环量为 $\int_0^{2\pi}(2\cos t+1)\mathrm{d}t=2\pi$.

【4455】 求向量 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}(\arctan\frac{y}{x})$ 沿着围线 C 的环量 Γ：

(1)C 不围绕 Oz 轴；(2)C 围绕 Oz 轴.

解 我们有
$$\boldsymbol{a}=-\frac{y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{j}.$$

于是，易知 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$（除 $x=y=0$，即 Oz 轴上的点）.

(1)若 C 不围绕 Oz 轴，则可于 C 上张一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交，于是，根据斯托克斯公式，得

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}S=0.$$

(2)若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周，取常数 $\tau>0$ 充分小，使 C 位于平面 $z=\tau$ 的上方. 在平面 $z=\tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $C_r(x^2+y^2=r^2,\ z=\tau)$ 充分小，使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式，得

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\oint_{-C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是，

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\tau$ 后，得

$$\oint_{C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

从而，$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi$.

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见，假定 $n=2$. 在平面 Ozx 上引辅助线(直线段)AB，将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线

$$C_1=ABMA \quad 与 \quad C_2=ANBA$$

(图 8.74). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi, \quad \oint_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi.$$

于是，注意到 $\overline{AB}$ 的曲线积分(第二型)与 $\overline{BA}$ 上的曲线积分相消，即得

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\oint_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=4\pi.$$

完全类似地，可得一般情况(C 围绕 Oz 轴旋转 n 圈)时，有

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi n.$$

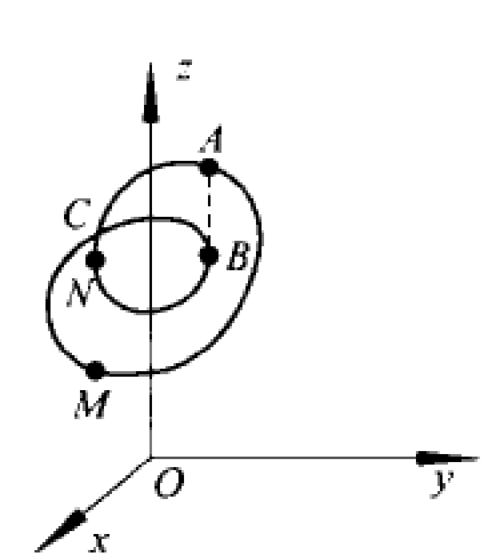


图 8.74

【4456】$^+$ 平面的不可压缩定常流由速度向量

$$\boldsymbol{w}=u(x,y)\boldsymbol{i}+v(x,y)\boldsymbol{j}$$

描述，试确定：(1)经过区域 S 的边界(封闭围线)C 流出的流体的量 Q(流量)；(2)速度向量沿着围线 C 的环量 Γ. 若流场无源泉、无漏孔且无旋度，则函数 u 和 v 满足怎样的方程？

解 (1)考虑包含着点 $D(x,y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元 $ABCD$(图 8.75).

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量为 $u(x,y)\Delta y$(为简单起见，设密度 $\rho=1$)，而同时从 BC 边流出的量为 $u(x+\Delta x,y)\Delta y$. 于是，在单位时间内，沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x\Delta y}\Delta y.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x,y) 沿 Ox 轴方向的发散强度.

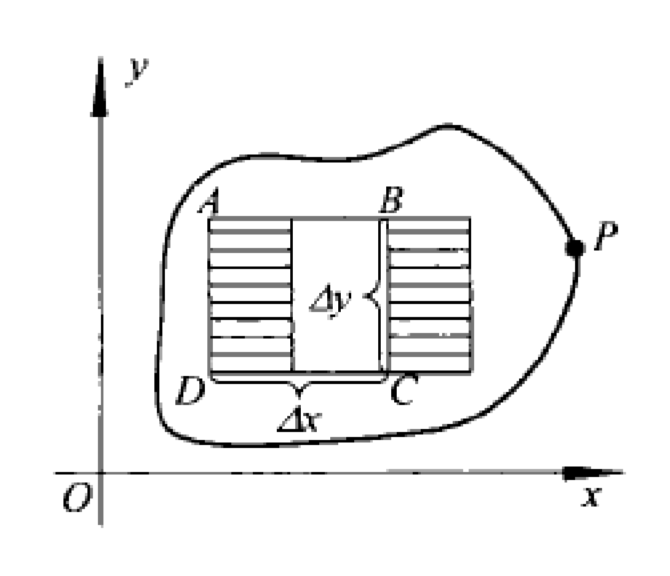


图 8.75

类似地，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x,y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是，在点 (x,y) 处流体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$，而对于面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此，总的流量为

$$Q=\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一解法：令点 P 为围线 C 上的任一点，$\boldsymbol{n}$ 为向外法向量，考虑曲线元素 ds. 单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ=w_n ds,$$

其中 w_n 为点 P 处的流速 $\boldsymbol{w}$ 在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影：$w_n=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}$. 于是，所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q=\int_C w_n ds.$$

但是，$w_n=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=u\cos(\boldsymbol{n},x)+v\cos(\boldsymbol{n},y)=u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}$ **)，故得

$$Q=\int_C udy-vdx.$$

应用格林公式，即得
$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2) $d\Gamma=\boldsymbol{w}\cdot d\boldsymbol{r}=udx+vdy$，故

$$\Gamma=\int_C udx+vdy=\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

若流场无源泉、无漏孔及无旋度，则对于流场中任何围线 C 及其所包围的区域 S，均有

$$Q=0 \quad 及 \quad \Gamma=0.$$

于是，在流场中的每一点，均有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 及 \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} 及 \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u,v 所应满足的方程.

*) 作者注：从原书答案来看，本题叙述有误. 最后的问题中"流体是不可压缩"应改为"流场无源泉、无漏孔"，而在题目开始，应假定流体不可压缩.

**) 参看 4323 题的推导.

【4457】 证明：场 $\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求这个场的势.

提示 只要证明 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 又由势 u 满足 $du=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$，可得 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数.

解 由于对空间任一点 (x,y,z) 均有

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}&=\left\{\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y+2z)]-\frac{\partial}{\partial z}[xz(x+2y+z)]\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)]-\frac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)]\right\}\boldsymbol{j}\\&\quad+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)]-\frac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)]\right\}\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{a}$ 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}du&=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz\\&=xyz(dx+dy+dz)+(x+y+z)(yzdx+zxdy+xydz)=xyzd(x+y+z)+(x+y+z)d(xyz)\\&=d[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数.

【4458】 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场 $\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$ 的势.

解 由于 $du=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{m}{r^3}(xdx+ydy+zdz)=-\frac{m}{2r^3}d(r^2)=-\frac{m}{r^2}dr=d\left(\frac{m}{r}\right)$，

故势 $u=\frac{m}{r}+C$（C 为任意常数）. 通常取 $u=\frac{m}{r}$ $(r\neq 0)$.

【4459】 求质量 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点位于点 M_i $(i=1,2,\cdots,n)$，求此质点系所产生的引力场的势.

解 引力场 $\boldsymbol{a}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i$，其中 r_i 为动点 M 与 M_i 之间的距离. 由于

$$du=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+C$（$C$ 为任意常数），通常取 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$.

【4460】 证明：场 $\boldsymbol{a}=f(r)\boldsymbol{r}$（其中 $f(r)$ 是单值连续函数）是有势场. 求这个场的势.

解 利用 4436 题(2)的结果，即知 $\mathrm{rot}(f(r)\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{a}$ 为有势场. 又由于

$$du=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=xf(r)dx+yf(r)dy+zf(r)dz=\frac{1}{2}f(r)d(r^2)=rf(r)dr,$$

故势 $u=\int_{r_0}^{r}tf(t)dt$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

【4461】 证明公式：$\mathrm{grad}_P\left(\iiint\limits_V\rho(Q)\frac{dV}{r}\right)=-\iint\limits_S\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}+\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{dV}{r}$，

其中 S 为区域 V 的边界曲面，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量，r 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 之间的距离.

证 首先指出，题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导数.

（i）先设点 $P(x,y,z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x,y,z)=\iiint\limits_V\rho(Q)\frac{dV}{r}. \tag{1}$$

显然，右端积分的被积函数对参变量 x,y,z 都具有连续的偏导数，故可在积分号下求导数，得

$$\mathrm{grad}_P f=\iiint\limits_V\rho(Q)\,\mathrm{grad}_P\frac{1}{r}dV. \tag{2}$$

又由于
$$\mathrm{grad}_P\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r},\quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{QP}$$

代入(2)式，得
$$\mathrm{grad}_P f=-\iiint\limits_V\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}dV. \tag{3}$$

在公式（4408 题(4)）$\mathrm{grad}_Q(\varphi\psi)=\varphi\,\mathrm{grad}_Q\psi+\psi\,\mathrm{grad}_Q\varphi$ 中，令 $\varphi=\rho(Q)$，$\psi=\frac{1}{r}$，再代入(3)式，得

$$\mathrm{grad}_P f=-\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV+\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{dV}{r}. \tag{4}$$

根据奥氏公式，有
$$\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint\limits_S\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}. \tag{5}$$

将上式代入(4)，即得
$$\mathrm{grad}_P f=-\iint\limits_S\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}+\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

（ii）现设点 $P(x,y,z)$ 在 V 的内部. 仍按(1)式令 $f(x,y,z)$. 注意，这时(1)式右端的积分为广义重积分（点 P 为瑕点）；但易知它收敛，因为在以 P 点为中心，ε 为半径的球域 V_ε 上的积分满足（$M=\max\limits_{Q\in V}|\rho(Q)|$）

$$\left|\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{\rho(Q)}{r}dV\right|\leqslant\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{|\rho(Q)|}{r}dV\leqslant M\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r}=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r}dr=2M\pi\varepsilon^2\to0\quad(\varepsilon\to+0).$$

我们证明：这时仍可将(1)式的积分在积分号下求导数而得(2)式. 事实上，由于

$$\left|\iiint\limits_{V_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV\right|\leqslant\iiint\limits_{V_\varepsilon}\left|\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right|dV=\iiint\limits_{V_\varepsilon}\left|-\rho(Q)\frac{x-\xi}{r^3}\right|dV\leqslant M\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r^2}$$
$$=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r^2}dr=4M\pi\varepsilon,$$

故积分 $\iiint\limits_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV$ 关于 x 一致收敛. 于是，(1)式右端的积分可在积分号下关于 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\iiint\limits_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV. \tag{6}$$

同理可得
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\iiint_V \rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\mathrm{d}V. \tag{7}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\iiint_V \rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\mathrm{d}V. \tag{8}$$
由(6),(7),(8)三式,即得(2)式,仿(ⅰ)段办法,可得(3)式与(4)式(注意,仿前,可知(4)式右端两个积分都收敛).但不能直接对 V 应用奥式公式而得(5)式,因为有瑕点 P,但显然可对$V-V_\varepsilon$,应用奥式公式,得
$$\iiint_{V-V_\varepsilon} \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)\mathrm{d}V=\iint_{S-S_\varepsilon}\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r} \tag{9}$$
其中 S_ε 为球域 V_ε 的边界(球面),在 S_ε 上的 $\boldsymbol{n}$ 是指向点 P 的.由于
$$\left|\iint_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r}\right|\leqslant\sqrt{3}\iint_{S_\varepsilon}|\rho(\theta)|\frac{\mathrm{d}S}{r}\leqslant\sqrt{3}M\iint_{S_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}S}{r}=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2=4\sqrt{3}\pi M\varepsilon,$$
故 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\iint_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r}=0$.于是,在(9)式两端令 $\varepsilon\to+0$ 取极限,即得(5)式.以(5)式代入(4)式,最后得所要证的公式
$$\mathrm{grad}_P\left\{\iiint_V\rho(\theta)\frac{\mathrm{d}V}{r}\right\}=-\iint_S\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r}+\iiint_V\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r}.$$
证毕.

【4462】 证明:若 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}u$,其中
$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\quad r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$
则 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\rho(x,y,z)$ (假定相应的积分有意义).

证 首先指出,为保证题述的广义重积分(既是无穷积分,又是瑕积分)的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性,一般我们需假定:$\rho(\xi,\eta,\zeta)$在全空间具有连续的偏导数,并且当 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ 充分大时($R\geqslant R_0$),有
$$|\rho(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant\frac{M}{R^{2+\alpha}}, \tag{1}$$
其中 $M>0,\alpha>0$,是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.用 V_0 表示以 P_0 为中心,1 为半径的单位球域.我们先限制点 $P(x,y,z)$ 只在 V_0 中变动.又用 V_1 表示以 P_0 为中心,2 为半径的球域,V_2 表示整个空间去掉 V_1 所剩下的部分(无界域).令
$$u_1(x,y,z)=\iiint_{V_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$
$$u_2(x,y,z)=\iiint_{V_2}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{3}$$
于是,
$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}[u_1(x,y,z)+u_2(x,y,z)]. \tag{4}$$
(2)式右端为瑕积分,在 4461 题证明的第(ⅱ)段中已证它是收敛的;(3)式右端为无穷积分,下面证明它收敛.令
$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},\quad R_1=\max\{R_0,2(r_0+1)\},$$
则当 $R\geqslant R_1$ 时,有 $R\geqslant R_0$(从而,(1)式满足),且 $R\geqslant2(r_0+1)$.以 Q 表示点(ξ,η,ζ),O 表示原点$(0,0,0)$.由于三角形两边之和大于第三边,故(注意 $P\in V_0$).
$$R=\overline{OQ}\leqslant\overline{OP}+\overline{PQ}\leqslant r_0+1+r\leqslant\frac{R}{2}+r,$$

从而，

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\left|\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{rR^{2+\alpha}}\leqslant 2M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{R^{3+\alpha}}$$

$$=2M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{R^2}{R^{3+\alpha}}\mathrm{d}R=2M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}R}{R^{1+\alpha}}=\frac{8M\pi}{\alpha R_1^{\alpha}}<+\infty, \tag{5}$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知 $u(x,y,z)$ 有定义. 由于 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\Delta u$，故我们只要证明

$$\Delta u=\rho(x,y,z). \tag{6}$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次：

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{8}$$

为此，只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x,y,z)\in V_0$ 一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\xi-x}{r^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导，可得：当 $R_2>R_1=\max\{R_0,2(r_0+1)\}$ 时，对一切 $(x,y,z)\in V_0$，有

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r^2R^{2+\alpha}}\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{R^{4+\alpha}}=\frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}},$$

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r^3R^{2+\alpha}}\leqslant 32M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{R^{5+\alpha}}=\frac{128M\pi}{(1+\alpha)R_2^{2+\alpha}}.$$

由此可知，(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x,y,z)\in V_0$ 一致收敛. 因此，(7)式与(8)式当 $(x,y,z)\in V_0$ 时成立. 同理可证，当 $(x,y,z)\in V_0$ 时，有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{10}$$

将(8)，(9)，(10)三式相加，即得(注意到 $\Delta(\frac{1}{r})=0$)

$$\Delta u_2=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=0. \tag{11}$$

下面再求 $\Delta u_1=\mathrm{div}(\mathrm{grad}u_1)$. 由 4461 题的结果知

$$\mathrm{grad}u_1=-\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{r}+\iiint\limits_{V_1}\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r}, \tag{12}$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界(球面). 显然，当 $P(x,y,z)\in V_0$ 时，(12)式右端的第一个积分(曲面积分)的被积函数具有对于 x，y 及 z 的连续偏导数，故可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导数. 另外，仿照 4461 题(ⅱ)段之证可知(12)式右端的第二个积分(三重积分)也可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导数. 于是，得

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u_1)=-\iint\limits_{S_1}\mathrm{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\boldsymbol{n}}{r}\right]\mathrm{d}S+\iiint\limits_{V_1}\mathrm{div}_P\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\right]\mathrm{d}V. \tag{13}$$

利用公式 $\mathrm{div}(v\boldsymbol{a})=v\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}v$(4424 题(3))，可知(注意到 $\rho(Q)\boldsymbol{n}$ 及 $\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)$ 均与 P 无关)

$$\mathrm{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\boldsymbol{n}}{r}\right]=\rho(Q)\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(Q)\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\mathrm{div}_P\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\right]=\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\cdot\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)=-\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right).$$

代入(13)式，得

$$\Delta u_1=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S-\iiint\limits_{V_1}\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V. \tag{14}$$

由于

$$\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\rho(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)+\mathrm{grad}_Q\,\rho(Q)\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right),$$

而 $\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=0\ (Q\neq P)$，故(14)式可写为

$$\Delta u_1=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S-\iiint\limits_{V_1}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V. \tag{15}$$

下面计算(15)式中的三重积分，用 Ω_ε 表示以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ε 为半径的球域，其边界(球面)记为 S_ε。对 $V_1-\Omega_\varepsilon$ 应用奥氏公式，得

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{V_1-\Omega_\varepsilon}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V=\iint\limits_{S_1+S_\varepsilon}\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是向外法向量，从而，在 S_ε 上是指向点 $P(x,y,z)$ 的。由中值定理知，

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S=-\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\mathrm{d}S}{r^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\rho(Q_\varepsilon)\cdot4\pi\varepsilon^2=4\pi\rho(Q_\varepsilon),\end{aligned}$$

其中 Q_ε 是球面 S_ε 上的某一点。代入(16)式，得

$$\iiint\limits_{V_1-\Omega_\varepsilon}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S+4\pi\rho(Q_\varepsilon),$$

两端令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，得

$$\iiint\limits_{V_1}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}V=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S+4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式，得

$$\Delta u_1=-4\pi\rho(x,y,z). \tag{17}$$

由(17)式，(11)式以及(4)式，即得(6)式。于是，(6)式对一切点 $P(x,y,z)\in V_0$ 成立。由于 V_0 的中心 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是任意的(可为空间任一点)，故知(6)式对空间任一点都成立。证毕。